

## **APLICAÇÕES DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS EM MODELAGEM MATEMÁTICA PARA ENGENHARIA: UM ESTUDO SOBRE A FLAMBAGEM DE COLUNAS**

Gemilson Leandro da Silva Aguiar<sup>1</sup>; Moacir César da Vitória Júnior<sup>2</sup>; Natan Sian das Neves<sup>1</sup>; Roger da Silva Rodrigues<sup>3</sup>; Vitor Pancieri Pinheiro<sup>4</sup>

1. Acadêmico do curso de Engenharia Civil da Faculdade Brasileira – MULTIVIX
2. Mestre em Física, docente da Faculdade Brasileira – MULTIVIX.
3. Mestre em Engenharia Mecânica, docente da Faculdade Brasileira – MULTIVIX.
4. Especialista em Docência do Ensino Superior, docente da Faculdade Brasileira - MULTIVIX

### **RESUMO**

O presente artigo tem por objetivo expor a relevância conceitual e matemática do uso de equações diferenciais voltada para modelagem do fenômeno de flambagem de colunas, no contexto da engenharia. O domínio das técnicas associadas às equações diferenciais é imprescindível ao engenheiro e graduandos em engenharia, uma vez que sua correta manipulação pode conduzir-los às interpretações físicas adequadas em relação a uma grande variedade de fenômenos físicos. O entendimento do binômio formado entre o modelo físico conceitual e seu equacionamento matemático associado compõe uma visão completa de um fenômeno físico. Logo, há necessidade de uma compreensão mais plena acerca de equações diferenciais, uma vez que estas descrevem modelos de engenharia, não só como elemento matemático, mas como meio representativo da interpretação física de cada pormenor do fenômeno trabalhado.

**Palavras-Chave:** Equações. Diferenciais. Flambagem. Colunas. Modelagem.

### **ABSTRACT**

This article aims to expose the conceptual and mathematical relevance of the use of differential equations for modeling the column buckling phenomenon, in the context of engineering. The field of techniques associated with differential equations is essential to engineer and graduate students in engineering, since their correct handling can lead it to the appropriate physical interpretations in relation to a wide range of physical phenomena. The understanding of the binomial formed between the conceptual physical model and its associated mathematical modeling makes up a complete picture of the physical phenomenon. Therefore, there is need for a fuller understanding of differential equations, since they describe engineering models not only as a mathematical element, but as a representative mean of physical interpretation of each detail of the working phenomenon.

**Keywords:** Equations. Differential. Buckling. Column.; Modeling.

### **INTRODUÇÃO**

Na seara científica e prática da engenharia, mais especificamente na área de mecânica dos sólidos, os temas ligados a solicitações básicas aplicadas a estruturas e elementos mecânicos tem elevada relevância, visto que, as aplicações em áreas como a mecânica e a construção civil demandam projetos precisos e capazes de garantir a integridade de seus componentes.

Em um contexto mais convergente à resistência dos materiais é possível destacar as solicitações fundamentais inerentes à flexão de vigas e à flambagem de colunas, cujos modelos matemáticos são representados via equações diferenciais. Uma análise cuidadosa dessas duas solicitações revela a similaridade existente entre os modelos matemáticos que descrevem os dois fenômenos. Em verdade, o modelo matemático é feito exatamente pela mesma expressão diferencial da curva elástica, diferenciando-se em seus conceitos apenas quanto à forma de aplicação da carga que origina as deflexões (TIMOSHENKO, 1975)(POPOV, 1978).

A gama fenômenos práticos em que se encontra a presença de peças solicitadas por flambagem é ampla e pode ser representada por exemplos mais evidentes como colunas de concreto armado em estruturas até algumas outras mais implícitas e de natureza mais mecânica como amortecedores e bielas de motores a combustão. Em linhas gerais a modelagem da flambagem de barras utilizando as equações diferenciais vem de forma substancial destacar o papel protagonista desempenhado por essa classe de equações na modelagem de diversos problemas práticos ligados à engenharia em suas diversas vertentes.

### TÉCNICAS ELEMENTARES DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Um dos grandes motivos do uso das equações diferenciais na modelagem para ciências exatas em geral deve-se a sua versatilidade, podendo estas oscilar desde equações extremamente simples a modelos de grande complexidade. Daí surge a necessidade de organizar essas equações em classes, segundo alguns critérios específicos. Um dos critérios mais abrangentes seriam a bipartição em equações diferenciais parciais e equações diferenciais ordinárias, que destoam quanto à quantidade de parâmetros independentes (KREYSZIG, 2009)(BOYCE; DIPRIMA, 2014). O fenômeno físico da flambagem, dentre outros de grande importância na engenharia, é modelado na quase totalidade de seus casos por equações ordinárias de segunda ordem. Tais equações podem ser escritas em sua forma mais geral como:

$$A(x) \frac{d^2y}{dx^2} + B(x) \frac{dy}{dx} + C(x)y = D(x) \quad (1)$$

A equação acima representa a estrutura de uma equação diferencial de segunda ordem não homogênea com coeficientes variáveis, o que configura seu modelo mais abrangente. A solução de um caso como este deve ser composto por uma solução que atenda à versão homogênea da equação 1 superposta com outra solução que atenda somente a parte não-homogênea representada pela função  $D(x)$ . A forma da solução geral pode ser expressa por:

$$y = y_h + y_p \quad (2)$$

Em relação à homogeneidade, a equação 1 pode ser considerada homogênea quando o termo  $D(x)$  for nulo. Já em relação aos coeficientes dividem-se as equações em tipos de coeficientes constantes ou coeficientes variáveis, sendo as primeiras de mais fácil solução. Para uma equação homogênea de coeficientes constante temos a seguinte estrutura, em que  $a$ ,  $b$  e  $c$  são constantes.

$$a \frac{d^2y}{dx^2} + b \frac{dy}{dx} + cy = 0 \quad (3)$$

Suponha que uma função do formato  $y = e^{\lambda x}$  seja uma boa proposta de solução para a equação 3. Substituindo a proposta na mesma, tem-se:

$$a\lambda^2 e^{\lambda x} + b\lambda e^{\lambda x} + ce^{\lambda x} = 0 \quad (4)$$

Rearranjando a equação acima e evidenciando o termo exponencial, pode-se apresentar:

$$e^{\lambda x}(a\lambda^2 + b\lambda + c) = 0 \quad (5)$$

Uma inspeção simples na equação 5 mostra que a obediência da igualdade depende da nulidade do termo entre parênteses, uma vez que, uma função exponencial não pode assumir valor nulo. Dessa forma tem-se que:

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \quad (6)$$

A equação 6 é denotada equação característica, cuja principal utilidade é determinar o formato da solução geral da equação diferencial ordinária. Essa prerrogativa é feita através do cálculo do discriminante ( $\Delta$ ) como mostrado a seguir para três casos (BOYCE; DIPRIMA, 2014).

**Caso I:  $\Delta > 0$**

Um resultado com discriminante positivo indica que a equação característica 6 terá duas raízes reais e distintas. Dessa forma a solução da EDO homogênea associada pode ser escrita como:

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} \quad (7)$$

**Caso II:  $\Delta = 0$**

Analogamente um resultado nulo do discriminante indica que a equação 6 terá uma raiz única. Dessa forma a solução da EDO homogênea associada pode ser escrita como:

$$y = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x} \quad (8)$$

**Caso III:  $\Delta < 0$**

Por fim um resultado negativo para o discriminante indica que a equação 6 terá duas raízes complexas. Dessa forma, a solução da EDO homogênea associada pode ser escrita como:

$$y = C_1 e^{(\alpha+\beta i)\lambda x} + C_2 x e^{(\alpha-\beta i)\lambda x} \quad (9)$$

Evidenciando o exponencial formado pela parte real da raiz característica, tem-se:

$$y = C_1 e^{(\alpha+\beta i)x} + C_2 x e^{(\alpha-\beta i)x} \quad (10)$$

Por sua vez, as exponenciais de números complexos presentes na equação 10 podem ser mais bem trabalhadas com a fórmula de Euler mostrada a seguir.

$$e^{\beta i x} = \cos(\beta x) + i \operatorname{sen}(\beta i) \quad (11)$$

O uso da fórmula de Euler na equação 10 permite a escrita da seguinte solução geral para o caso com raízes complexas.

$$y = e^{\alpha x} (C \cos(\beta i) + D \operatorname{sen}(\beta i)) \quad (12)$$

Tais técnicas e desenvolvimentos mostrados a priori permitem o entendimento e compreensão matemática da modelagem aplicada a flambagem de barras com várias condições de contorno distintas.

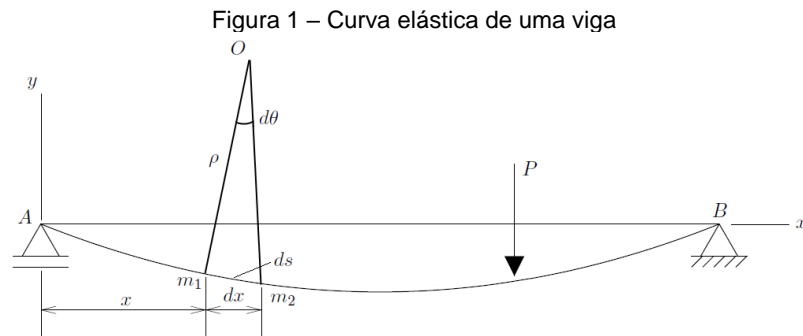
## DESENVOLVIMENTO MATEMÁTICO

A Teoria da Viga Elástica foi concebida por Leonhard Euler e Daniel Bernoulli em meados do século XVIII. Ambos foram extremamente influentes em diversas áreas do conhecimento, dentre elas mecânica dos fluidos, resistência dos materiais, cálculo diferencial entre outras. As ideias que embasam a teoria são pautadas fortemente na geometria e cálculos diferencial e integral.

Para iniciar o desenvolvimento matemático da equação da curva elástica para vigas e colunas é preciso relembrar uma expressão originária da modelagem de flexão pura, que determina a curvatura de um membro solicitado por momento fletor. Tal equação e sua dedução podem ser facilmente encontradas em textos de resistências dos materiais.

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{EI_z} \quad (13)$$

Considera-se a figura 1 mostrada abaixo como um esquema de uma viga deformada, cujos elementos geométricos são utilizados na dedução a seguir.



Fonte: Elaborada pelo autor

Observando o esquema acima, é trivial observar com apoio da trigonometria básica que:

$$ds = r d\theta \quad (14)$$

Rearranjando a equação 14 de forma a explicitar a curvatura, tem-se:

$$\frac{1}{r} = \left| \frac{d\theta}{ds} \right| \quad (15)$$

Vamos assumir o módulo como sendo positivo, já que os dois resultados são possíveis de acordo com o sinal do momento fletor.

$$\frac{1}{r} = \frac{d\theta}{ds} \quad (16)$$

Como na prática da engenharia civil trabalha-se com pequenas deformações temos que a curva elástica é achatada e pode-se adotar as hipóteses simplificadoras abaixo.

$$ds \approx dx \quad (17)$$

$$\theta \approx \text{tg} \theta = \frac{dy}{dx} \quad (18)$$

Aplicando as simplificações contidas nas equações 17 e 18 obtém-se:

$$\frac{1}{r} = \frac{d^2y}{dx^2} \quad (19)$$

Observe que de acordo com o sistema de coordenadas posto em nosso esquema da figura 2 o deslocamento vertical ou deflexão de cada ponto da viga é dado por  $y$ . Portanto, a expressão 17 explicita a curvatura em função da flecha. Dito isso, igualando-a às expressões 13 e 19 chega-se a equação diferencial da curva elástica:

$$EI_z \frac{d^2y}{dx^2} = M \quad (20)$$

A equação 20 evidencia a dependência da flecha com o carregamento, geometria e material, o que se mostra intuitivo. As relações diferenciais existentes entre carregamento, esforço cortante e momento fletor são postas abaixo.

$$\frac{dM}{dx} = V \quad \frac{dV}{dx} = -q \quad (21)$$

Por fim, utilizando as relações conceituais acima, é possível escrever a equação diferencial da curva elástica de duas formas alternativas, mostradas a seguir.

$$EI_z \frac{d^3y}{dx^3} = V \quad (22)$$

$$EI_z \frac{d^4y}{dx^4} = -q \quad (23)$$

Para o caso de vigas delgadas em que deformações mais significativas podem ocorrer, é preciso abandonar as simplificações 17 e 18 e considerar a tangente à curva elástica em cada ponto como sendo:

$$\theta = \arctg\left(\frac{dy}{dx}\right) \quad (24)$$

Com isso substitui-se a equação 24 na equação 16, tem-se:

$$\frac{1}{r} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{d \arctg\left(\frac{dy}{dx}\right) dx}{dx ds} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} \quad (25)$$

A equação 25 é chamada de fórmula exata da curva elástica, pois não contém aproximações para pequenas deformações, sendo uma expressão geral de cálculo. Essa mesma equação foi concebida nos trabalhos de Leonhard Euler.

### DESENVOLVIMENTO MATEMÁTICO

Uma forma interessante de expor a modelagem de flambagem de barras é baseada no desenvolvimento analítico da deflexão lateral que ocorre colunas para distintas condições de vinculação. Uma sensibilidade física maior sobre o tema pode ser desenvolvida quando, para uma primeira análise toma-se um modelo de coluna ideal. Analogamente a diversos outros fenômenos físicos modelados por equações diferenciais em engenharia, um modelo simples e idealizado tem como principal função a expor do mecanismo físico de um fenômeno em suas linhas mais gerais, não se preocupando *a priori* em gerar resultados realísticos, mas sim uma compreensão inicial, entretanto, fundamental acerca do problema. O dito modelo de coluna ideal é caracterizado pelas seguintes hipóteses simplificadoras, que tem por foco, a redução da complexidade física e matemática no intuito de gerar soluções possíveis. Elencam-se as hipóteses abaixo.

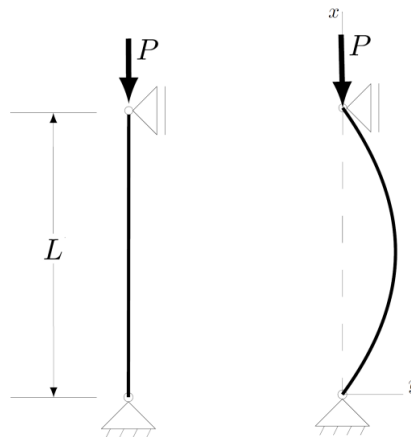
- I. Coluna perfeitamente reta antes da aplicação da carga
- II. Material Homogêneo
- III. Carga aplicada no centroide da área transversal
- IV. Material com comportamento elástico linear
- V. A flambagem ocorre em um único plano.

É possível equacionar em formato de função o deslocamento lateral sofrido por colunas ideais, bastando para isso o conhecimento de sua condição de vinculação. As três configurações mais clássicas são colunas presas por pinos em ambas às extremidades, colunas engastadas com extremidade livre e engastadas-articuladas (BEER et al., 2015) (HIBBELER, 2006).

### Configuração de Vínculos I

Com o intuito de determinar a carga mínima que provoca flambagem em barras ideais, considere uma coluna articulada em suas extremidades inferior e superior como mostrado na figura 2.

Figura 2 – Coluna biarticulada sujeita ao carregamento axial



Fonte: Elaborada pelo autor

A aplicação do método das seções na coluna revela um momento fletor interno com a seguinte estrutura  $M(y) = -Py$ . Tal constatação permite-nos escrever a equação da curva elástica como sendo:

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = -Py \quad (26)$$

Atribuindo uma nova constante  $k$  representada por:

$$\frac{P}{EI} = k^2 \quad (27)$$

E substituindo essa constante na equação 26, tem-se um formato mais sucinto mostrado na equação 28.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k^2y = 0 \quad (28)$$

A expressão 28 é uma equação diferencial de segunda ordem, homogênea e com coeficientes constantes. Dessa forma, sua solução geral é dada por:

$$y(x) = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right) + C_2 \sen\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right) = 0 \quad (29)$$

As condições de contorno que caracterizam uma coluna com extremidades articuladas são representadas por

$$y(x = 0) = 0 \quad (30a)$$

$$y(x = L) = 0 \quad (30b)$$

Aplicando-se as condições de contorno dispostas acima, é possível com facilidade perceber que  $C_1 = 0$  e que:

$$\text{sen}\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}L\right) = 0 \quad (31)$$

Para obedecer à igualdade 31 é necessário escolher os arcos da função seno caracterizados por  $kL = n\pi$ . Tal implicação em conjunto com a equação 28 resulta em:

$$P = \frac{n^2\pi^2EI}{L^2} \quad (32)$$

Observa-se da equação 32 que existem diversos valores de carga que atendem com sucesso as condições de contorno propostas e por consequência promovem flambagem a coluna, entretanto, todas múltiplas de uma carga mínima ou fundamental denominada carga crítica de Euler, mostrada abaixo. É importante salientar que cada coluna com seus tipos de vinculação terá sua expressão específica de carga crítica, sendo a expressão a seguir válida apenas para nossa coluna articulada em ambas às extremidades.

$$P_{cr} = \frac{\pi^2EI}{L^2} \quad (32)$$

Substituindo a carga crítica de Euler na equação 29, obtêm-se uma expressão para o deslocamento horizontal de uma coluna.

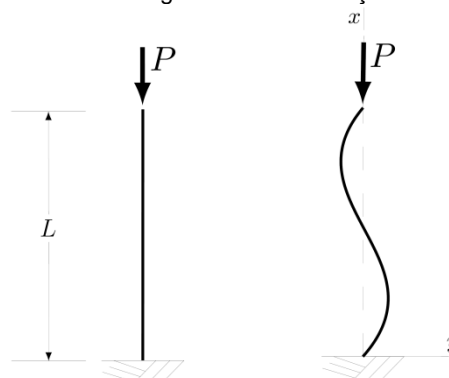
$$y(x) = C_2 \text{sen} \frac{\pi x}{L} \quad (32)$$

A constante  $C_2$  pode ser entendida como a deflexão máxima  $y_{máx}$  da coluna na forma flambada. Por outro lado, se analisar tal constante com conceitos trigonométricos, podemos distingui-la como a amplitude da função seno.

## Configuração de Vínculos II

A determinação da carga de flambagem para colunas com diferentes tipos de vínculos segue a mesma lógica mostrada no caso passado, dessa forma, observe um esquema na figura 3 da forma deformada de uma coluna engastada em uma extremidade e livre em outra.

Figura 3 – Coluna engastada-livresob ação da carga  $P$ .



Fonte: Elaborada pelo autor

As condições de contorno conhecidas são as seguintes:

$$y(x = 0) = 0 \quad (35a)$$

$$y'(x = 0) = 0 \quad (35b)$$

$$y(x = L) = \delta \quad (35c)$$

O momento fletor interno de um trecho dessa coluna pode ser equacionado como mostrado abaixo.

$$M = -Py + P\delta \quad (36)$$

Substituindo o momento fletor da equação 36 na equação diferencial da curva elástica, representada a posteriori pela expressão 20, temos:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{P}{EI}y = \frac{P}{EI}\delta \quad (37)$$

A sentença diferencial 37 é uma equação de segunda ordem não homogênea, cuja solução será encontrada pelo método dos coeficientes indeterminados, que consiste em encontrar a solução particular da equação não homogênea ( $y_p$ ) e somar com a solução da equação homogênea ( $y_h$ ). A solução geral da equação 37 é dada por:

$$y(x) = y_h + y_p = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right) + C_2 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right) + \delta \quad (38)$$

Aplicando as condições de contorno 35a e 35b na equação 37 tem-se a solução:

$$y(x) = \delta \left[ 1 - \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right) \right] \quad (39)$$

Por fim, considerando-se a condição de contorno dada na equação 35b e impondo-a a expressão 39 temos a seguinte igualdade a ser obedecida:

$$\cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}L\right) = 0 \quad (40)$$

Tal igualdade é respeitada quando o arco obedece à seguinte lei de formação:

$$\sqrt{\frac{P}{EI}}L = \frac{n\pi}{2} \quad (41)$$

Com algebrismo simples a carga fica isolada da seguinte forma:

$$P = \frac{n^2\pi^2EI}{L^2} \quad (42)$$

Considerando que  $n$  varia nos inteiros positivos, a menor carga que podemos ter de forma a gerar flambagem na coluna é a chamada carga crítica, que para essa configuração de vinculação é dada por:



$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2} \quad (43)$$

Ao comparar o resultado trazido pela equação 43 com a carga crítica para uma coluna apoiada por pinos da equação 33 percebe-se que a configuração engastada-livre suporta uma carga crítica equivalente a apenas de um quarto da coluna apoiada por pinos. Essa sensibilidade da variação da carga crítica com a condição de vinculação pode ser generalizada de forma mais sintética apresentando uma variável chamada comprimento efetivo posta a seguir, que representa um fator que pondera a carga crítica (NASH; POTTER, 2014)(UGURAL, 2000).

$$L_e = kL \quad (44)$$

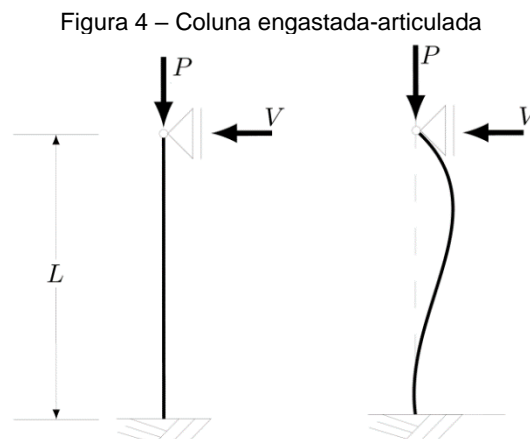
Na equação 44 o comprimento  $L$  deve ser corretamente interpretado como sendo o comprimento entre dois pontos de momento fletor nulo. Além disso  $K$  é conhecido como fator de comprimento efetivo e frequentemente é apresentado como único parâmetro para a determinação da carga crítica de uma determinada configuração de apoio. Sabido isso, torna-se possível escrever a equação 45.

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2} \quad (45)$$

A Equação acima é denotada como *carga crítica de Euler generalizada*, sob ação do comprimento efetivo.

### Configuração de Vínculos III

Por fim numa terceira condição de vinculação uma coluna com extremidade inferior engastada e apoiada por pinos na superior é proposta e seu esquema segue na figura 5.



Fonte: Elaborada pelo autor

As condições de contorno para essa configuração de apoios resumem-se a três dados de inclinação-deflexão postos abaixo.

$$y(x = 0) = 0 \quad (46a)$$

$$y'(x = 0) = 0 \quad (46b)$$

$$y(x = L) = 0 \quad (46c)$$

Durante a flambagem a articulação superior produzira uma reação lateral  $V$ , portanto para esse o momento fletor incluirá esse efeito, podendo a equação da linha elástica ser escrita como:

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = -Py + V(L - x) \quad (47)$$

Chamando  $\alpha^2 = \frac{P}{EI}$  para maior compactação, tem-se a equação 47 rescrita como:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \alpha^2 y = \frac{V}{EI}(L - x) \quad (48)$$

A equação 48 por sua vez é uma equação diferencial de segunda ordem linear, não homogênea assim como a equação 10. A solução dessa equação consiste analogamente ao caso passado em solucionar a parte homogênea e não homogênea separadamente e sobrepor as soluções. A solução geral é dada abaixo.

$$y(x) = C_1 \cos(\alpha x) + C_2 \sin(\alpha x) + \frac{V}{P}(L - x) \quad (49)$$

Derivando a equação 48, obtém-se a equação da inclinação a seguir.

$$\frac{dy}{dx} = -\alpha C_1 \sin(\alpha x) + C_2 \cos(\alpha x) + \frac{V}{P} \quad (50)$$

Substituindo-se as condições de contorno 46a e 46b nas equações 48 e 49, respectivamente é possível concluir que:

$$C_1 = -\frac{V}{EI}L \quad C_2 = -\frac{V}{P\alpha} \quad (51)$$

Com as constantes da equação 51 determinadas é possível inseri-las novamente na equação 49 e reescrevê-la da seguinte forma:

$$y(x) = C_1 \cos(\alpha L) + C_2 \sin(\alpha L) = 0 \quad (52)$$

Com isso usa-se a condição de contorno restante dada pela equação 46c chegando-se equação de existência a seguir:

$$tg(\alpha L) = \alpha L \quad (53)$$

As raízes da equação 53 são obtidas numericamente, e dentre elas a menor é apresentada abaixo.

$$tg(\alpha L) = 4,493 \quad (54)$$

Com algum algebrismo simples é possível demonstrar que a carga crítica é dada por:

$$P_{cr} = \alpha^2 EI = \frac{20,18EI}{L^2} \approx \frac{\pi^2 EI}{(0,7L)^2} \quad (55)$$

A diferença dessa carga crítica para a de uma coluna articulada é que seu comprimento é efetivo é dado por  $L_e = 0,7L$  ou ainda, seu fator de comprimento efetivo é de  $K = 0,7$ . Isso

significa na prática que é preciso uma carga crítica maior para flambar uma coluna com tal condição de vinculação.

## CONCLUSÃO

A simples observação da estrutura curricular de um curso de engenharia, independente da vertente específica, mostra um extenso trabalho sobre disciplinas como física e cálculo diferencial e integral no sentido de fornecer alicerces e ferramentas ao futuro engenheiro, de forma a permitir que ele seja capaz de sintetizar os fenômenos de interesse da parte específica de seu curso em modelos matemáticos adequados, ou seja, que descrevam com fidelidade o problema físico tratado considerado as simplificações adotadas.

Nessa linha, no âmbito mais específico das engenharias civil e mecânica, a modelagem do fenômeno de flambagem de colunas constitui tema relevante quando objetiva-se dimensionar e projetar estruturas ou mesmo elementos máquinas. Diferentemente do fenômeno solicitante de flexão que ocorre em vigas e elementos carregados transversalmente, a flambagem deve ser tratada como proibitiva em projetos de engenharia, a fim de garantir a integridade estrutural mecânica do projeto.

Por conseguinte é de bom grado salientar que a capacidade de projetar, dimensionar, calcular e executar um projeto com sucesso está intimamente relacionado com o domínio completo dos engenheiros sobre os fenômenos físicos que ocorrem no interior do projeto, assim como aqueles provenientes da interação do mesmo com sua vizinhança. Em outras palavras, a *expertise* sobre os modelos matemáticos descritos por equações diferenciais é de importância vital quando trata-se de engenharia, ao passo que a maioria absoluta dos tópicos físicos de interesse nesse âmbito são devidamente modelados por esse tipo de equações.

Portanto a compreensão por parte dos estudantes e futuros engenheiros acerca da importância de uma base sólida de fundamentos físicos e matemáticos puros é crucial, uma vez que sem essa base, o processo de modelagem de fenômenos físicos se torna inviável. Logo, é possível visualizar as disciplinas do ciclo básico do curso de engenharia, como efetivas ferramentas para o fim de modelagem e entendimento completo dos problemas práticos ligados ao cotidiano do engenheiro. Tal visão, além de ser a correta, constitui um parâmetro de motivação para os estudantes e consolida a ideia de que a engenharia é por conceito uma ciência aplicada.

## REFERÊNCIAS

- BEER, F. P. et al. **Mecânica dos Materiais**. 7ª Edição. Porto Alegre: AMGH Editora, 2015.
- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de contorno**. 9ª edição. LTC Editora., Rio de Janeiro, 2014.
- HIBBELER, R. C. **Resistência dos materiais**. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006.
- KREYSZIG, E. **Matemática superior para engenharia**. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2009.

NASH, W. A.; POTTER, M. C. **Resistência dos Materiais-5**. Porto Alegre: Bookman Editora, 2014.

POPOV, E. P. **Introdução a mecânica dos sólidos**. São Paulo: Edgard Blucher, 1978.

TIMOSHENKO, S. **Resistencia dos materiais**. Rio de Janeiro: Livros técnicos e científico editora, 1975.

UGURAL, A. C. **Mecânica dos materiais**. Rio de Janeiro: Grupo Gen-LTC, 2000.