

APLICAÇÕES DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS NA MODELAGEM MATEMÁTICA PARA ENGENHARIA: UM ESTUDO DA CONDUÇÃO DE CALOR UNIDIMENSIONAL EM REGIME TRANSIENTE

Adriano Shineyder de Moraes Ramos¹; Moacir César da Vitória Júnior²; Natan Sian das Neves¹; Roger da Silva Rodrigues³; Vitor Pancieri Pinheiro⁴

1. Acadêmico do curso de Engenharia Civil da Faculdade Brasileira – MULTIVIX
2. Mestre em Física, docente da Faculdade Brasileira – MULTIVIX.
3. Mestre em Engenharia Mecânica, docente da Faculdade Brasileira – MULTIVIX.
4. Especialista em Docência do Ensino Superior, docente da Faculdade Brasileira - MULTIVIX

RESUMO

O presente artigo tem como objetivo a exposição da importância do uso de equações diferenciais na modelagem de problemas da engenharia, mais especificamente, na área da transferência de calor por condução em corpos unidimensionais, sob regime transiente. O domínio de técnicas ligadas às Equações Diferenciais é importante para diversas análises físicas-matemáticas, o que a torna-as imprescindíveis para um estudante de engenharia de forma geral. Em uma primeira etapa é tratada unicamente as ferramentas para resolução das Equações Diferenciais que serão necessárias para a modelagem do problema em questão. Já o foco da segunda etapa é desenvolver a modelagem do problema, saindo do princípio da conservação de energia até chegar à equação geral da transferência de calor. A partir disso, é chegada a terceira etapa, em que aplica-se na equação geral todas as hipóteses simplificadoras, adaptando a equação geral no problema a ser estudado, e, feito isso, resolve-se o problema proposto, a saber, uma barra com extremidades isoladas ou extremidades com temperatura zero.

Palavras-chave: Condução. Calor. Equações. Diferenciais. Regime. Transiente.

ABSTRACT

This article aims to show the importance of the use of differential equations to model engineering problems, specifically in the area of heat transfer by conduction in one-dimensional bodies, under transient. The domain techniques related to Differential Equations is important for all physical-mathematical analysis, which is essential for an engineering student, whatever it may be. In the first stage it is only treated the tools to solve the differential equations that will be needed for the modeling of the problem in question. But the focus of the second step is to develop the modeling of the problem, leaving the principle of conservation of energy to get the general equation of heat transfer. From this, it is now the third stage, which applies to the general equation all the simplifying assumptions, adapting the general equation in the problem to be studied, and done it, solves the proposed problem, to know, one with bar isolated edges or ends with zero temperature.

Keywords: Heat. Conduction. Differential. Equations. Transient. Regime.

INTRODUÇÃO

Uma análise na matriz da engenharia mecânica permite identificar ao menos três macro áreas de pesquisa bem evidentes, formando um triângulo singular. São elas: as áreas de termo fluidos, mecânica dos sólidos e ciência dos materiais. O braço de termo fluidos, por sua vez, é composto por três ciências elementares: transferência de calor e massa, termodinâmica e mecânica dos fluidos.

A transferência de calor tem seu alicerce no domínio dos mecanismos físicos de troca de calor, podendo haver fenômenos térmicos condutivos, convectivos e radiativos. Cada um desses mecanismos tem sua modelagem algébrica específica e sua correspondente equação de taxa (DEWITT; INCROPERA, 2014).

No âmbito dos fenômenos de interesse para a engenharia, aqueles com base térmica puramente condutiva merecem grande destaque pelo grande leque possível de aplicações práticas, dentre elas o problema de isolamento térmico, superfícies estendidas e difusão de calor em sólidos de forma geral, que acabam se fazendo muito presentes no cotidiano e área industrial. Tais fenômenos de forma geral são regidos e modelados por pela Equação de Fourier-Biot, cuja potencialidade de modelagem se estende a qualquer problema puramente condutivo, destacando-se entre eles os problemas de condução de calor em regime transiente, uma vez que a mudança nos parâmetros no tempo não pode ser desprezada em diversos fenômenos físicos, e por consequência, também devem ser contabilizadas nos modelos matemáticos com intuito de representá-los (KREITH, 2012).

As equações diferenciais são ferramentas versáteis e eficazes na tradução de fenômenos físicos para linguagem matemática, tornando possível modelar e solucionar problemas em diversos campos de estudo como física, matemática, engenharia e estatística. Todo engenheiro deve adquirir domínio sobre estas equações durante seu período de formação, pois, compreendê-las é fundamental para um exercício competente da profissão, seja como no âmbito industrial ou acadêmico.

TÉCNICAS ELEMENTARES DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

O estudo do problema de calor difusivo unidimensional em regime transiente exige o conhecimento de algumas técnicas e fundamentos ancorados em cálculo diferencial. Dentre elas destacam-se soluções de equações diferenciais de primeira e segunda ordem homogêneas, série de Fourier e por fim métodos de separação de variáveis o intuito de solucionar a equação diferencial parcial que modela o fenômeno em questão.

FATOR INTEGRANTE

Um dos métodos mais conhecidos e difundidos para a solução de equações diferenciais de primeira ordem é o chamado fator integrante. Tal método consiste primeiramente em multiplicar toda a EDO por uma função da variável independente da equação (BOYCE; DIPRIMA, 2014). Apresenta-se abaixo uma equação diferencial homogênea de primeira ordem em uma forma geral.

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = g(x) \quad (1)$$

Ao multiplicar a equação 1 por uma função $\mu(x)$, tem-se:

$$\mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu(x)p(x)y = \mu(x)g(x) \quad (2)$$

Invocando a regra do produto é possível escrever:

$$\frac{d}{dx}[\mu(x)y] = \mu(x)\frac{dy}{dx} + y\frac{d\mu(x)}{dx} \quad (3)$$

A menos de uma subtração simples a equação 3 pode ser reescrita como:

$$\mu(x)\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[\mu(x)y] - y\frac{d\mu(x)}{dx} \quad (4)$$

Substituindo a expressão 4 na equação 2 gera-se:

$$\frac{d}{dx}[\mu(x)y] - y\frac{d\mu(x)}{dx} + \mu(x)p(x)y = \mu(x)g(x) \quad (5)$$

Propondo-se uma forma geral do fator integrante como:

$$\mu(t) = e^{\int p(t)dt} \quad (6)$$

E substituindo a proposta da equação 6 na equação 5, é fácil observar que:

$$\frac{d}{dx} [\mu(x)y] = \mu(x)g(x) \quad (7)$$

Integrando-se a equação 7, tem-se:

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)} \left[\int g(x)\mu(x)dx + C \right] \quad (8)$$

EQUAÇÃO CARACTERÍSTICA E FÓRMULA DE EULER

Dentre outros fenômenos físicos de grande importância na engenharia, os problemas de transferência de calor envolvem em sua quase totalidade casos descritos direta ou indiretamente por equações ordinárias de segunda ordem. Tais equações podem ser escritas em sua forma mais geral como:

$$A(x) \frac{d^2y}{dx^2} + B(x) \frac{dy}{dx} + C(x)y = D(x) \quad (9)$$

A equação acima representa a estrutura de uma equação diferencial de segunda ordem não-homogênea com coeficientes variáveis, o que configura seu modelo mais abrangente. A solução de um caso como esse deve ser composto por uma solução que atenda à versão homogênea da equação 9 superposta com outra solução que atenda somente a parte não-homogênea representada pela função $D(x)$. A forma da solução geral pode ser expressa por:

$$y = y_H + y_P \quad (10)$$

Em relação à homogeneidade, a equação 9 pode ser considerada homogênea quando o termo $D(x)$ for nulo. Já em relação aos coeficientes divide-se as equações em tipos de coeficientes constantes ou coeficientes variáveis, sendo as primeiras de mais fácil solução. Para uma equação homogênea de coeficientes constante temos a seguinte estrutura, em que a , b e c são constantes.

$$a \frac{d^2y}{dx^2} + b \frac{dy}{dx} + cy = 0 \quad (11)$$

Suponha que uma função do formato $y=e^{rx}$ uma boa proposta de solução para a equação 11. Substituindo a proposta na mesma, tem-se:

$$ar^2 e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0 \quad (12)$$

Rearranjando a equação acima e evidenciando o termo exponencial, pode-se apresentar:

$$e^{rx}(ar^2 + br + c) = 0 \quad (13)$$

Uma inspeção simples na equação 13 mostra que a obediência da igualdade depende da nulidade do termo entre parênteses, uma vez que, uma função exponencial não pode assumir valor nulo. Dessa forma tem-se que:

$$ar^2 + br + c = 0 \quad (14)$$

A equação 14 é denominada equação característica, cuja principal utilidade é determinar o formato da solução geral da equação diferencial ordinária. Essa prerrogativa é feita através do cálculo do discriminante (Δ) como mostrado a seguir para três casos.

Caso I: $\Delta > 0$

Um resultado com discriminante positivo indica que a equação característica 14 terá duas raízes reais e distintas. Dessa forma, a solução da EDO homogênea associada pode ser escrita como:

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} \quad (15)$$

Caso II: $\Delta=0$

Analogamente um resultado nulo do discriminante indica que a equação 14 terá uma raiz única. Dessa forma a solução da EDO homogênea associada pode ser escrita como:

$$y = c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx} \quad (16)$$

Caso III: $\Delta < 0$

Por fim um resultado negativo para o discriminante indica que a equação 14 terá duas raízes complexas. Dessa forma a solução da EDO homogênea associada pode ser escrita como:

$$y = c_1 e^{(\alpha+\beta i)x} + c_2 x e^{(\alpha+\beta i)x} \quad (17)$$

Evidenciando o exponencial formado pela parte real da raiz característica, tem-se:

$$y = e^{\alpha x} (c_1 e^{\beta i x} + c_2 x e^{-\beta i x}) \quad (18)$$

Por sua vez, as exponenciais de números complexos presentes na equação 18 podem ser melhor trabalhadas com a **fórmula de Euler** mostrada a seguir.

$$e^{\beta i x} = i \text{sen}(\beta x) + \cos(\beta x) \quad (19)$$

O uso da fórmula de Euler na equação 18 permite a escrita da seguinte solução geral para o caso com raízes complexas.

$$y = e^{\alpha x} (C \text{sen}(\beta x) + D \cos(\beta x)) \quad (20)$$

Tais técnicas e desenvolvimentos mostrados *a priori* permitem o entendimento e compreensão matemática da modelagem aplicada a flambagem de barras com várias condições de contorno distintas.

SÉRIE DE FOURIER

Funções periódicas se caracterizam pela repetição contínua de valores dentro de um determinado intervalo na variável dependente, como pode ser observado na equação 21 a seguir.

$$f(x + p) = f(x) \quad (21)$$

Nota-se a estrutura simples de uma função periódica do período p , na qual por conceito o valor da função volta a se confirmar a cada ciclo.

Em engenharia, matemática e física, pode-se observar a ocorrência frequente de fenômenos periódicos, como o processo de combustão dentro do pistão de um motor, as vibrações associadas às peças móveis em uma máquina, dentre outras aplicações pertinentes. Nesse contexto, foi proposta e desenvolvida pelo físico e matemático *Jean Baptiste Joseph Fourier* a formulação de uma série infinita capaz de representar funções periódicas através de uma soma de termos harmônicos.

A estrutura algébrica da série de Fourier pode ser apreciada na equação 22 a seguir.

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \quad (22)$$

Os coeficientes da série são dados pelas fórmulas de Euler elencadas abaixo, cuja prova matemática baseia-se no conceito de ortogonalidade de funções (KREYSZIG, 2009).

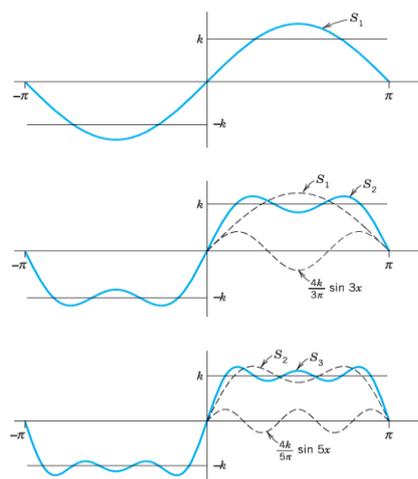
$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx \quad (23)$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \quad (24)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \quad (25)$$

A representação de uma função dotada de periodicidade através de uma série infinita pode constituir um conceito um tanto abstrato de se visualizar. Dessa forma, uma representação gráfica facilita o entendimento do conceito de aproximação proposto pela série.

Figura 1: Interpretação gráfica da série de Fourier



Fonte: Kreyszig, 2009, p. 04.

Observando a figura 1 é possível observar as sucessivas melhorias no ajuste dos termos da série em relação à função que se deseja representar. Esse fato elucida a convergência da série, que com infinitos termos, teoricamente, representaria a função numa sobreposição perfeita.

Método da separação de variáveis (MSV)

Uma grande parte dos fenômenos físicos de relevância para a engenharia, tais como problemas de transferência de calor, elasticidade, vibrações mecânicas, eletricidade, mecânica dos fluidos, dentre outros, são modelados através de equações diferenciais. Tais equações com níveis de complexidade variáveis podem ser classificadas da forma mais geral como ordinárias (EDO) ou parciais (EDP). A classificação é feita com base nos parâmetros dos quais depende a função a ser determinada pela equação diferencial. Funções que dependam de um só parâmetro são classificadas como EDO, enquanto

funções com dependência de mais de uma variável são enquadradas como EDP (KREYSZIG, 2009) (ÇENGEL, 2014).

Alguns exemplos de fenômenos modelados por equações diferenciais ordinárias são representados abaixo.

$$\frac{d^4y}{dx^4} = -\frac{q(x)}{EI} \quad \text{Deflexão de Vigas} \quad (26a)$$

$$F_r = m \frac{d^2x}{dt^2} \quad \text{Segunda Lei de Newton} \quad (26b)$$

$$m \frac{d^2y}{dt^2} + c \frac{dy}{dt} + ky = r(t) \quad \text{Vibrações Mecânicas Forçadas} \quad (26c)$$

De forma análoga pode-se apresentar alguns exemplos de problemas cuja modelo matemático exige uma representação por EDP. Seguem alguns desses casos.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \text{Equação da Continuidade para Fluidos} \quad (27a)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \quad \text{Equação de Poisson Bidimensional} \quad (27b)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{Equação da Onda Unidimensional} \quad (27c)$$

Por natureza a solução de equações diferenciais parciais é mais complexa em detrimento as diferenciais ordinárias. Visto isso será apresentada em seguida um método específico para a manipulação desse grupo tão versátil de equações.

O método de separação de variáveis consiste basicamente na proposta de uma solução formada por um produto de funções das variáveis independentes do problema. Em outras palavras, se um determinado campo potencial depende de dois parâmetros, é possível considerar que uma solução viável da EDP seja um produto entre uma função exclusiva do primeiro parâmetro e outra função exclusiva do segundo.

Para melhor contextualizar o método, considere que um determinado fenômeno de interesse, como é o caso da vibração de uma onda em uma corda tensionada, possa ser expressa matematicamente pela equação 27c. É de fácil observação que a variável primal $u=u(x,t)$ varia de acordo com uma coordenada espacial e com o tempo.

A expressão algébrica que traduz a ideia central do método de separação de variáveis é trazida pela seguinte proposta de solução mostrada a seguir.

$$u(x, t) = F(x)I(t) \quad (28)$$

O método de separação de variáveis inicia-se com a introdução da proposta de solução apresentada na equação 28 de volta na equação de governo, exposta na equação 27c. Dessa forma tem-se:

$$F\ddot{I} = c^2 F''I \quad (29)$$

Note que as derivadas temporais são simbolizadas por pontos acima da variável diferenciada enquanto as derivadas espaciais são simbolizadas de forma sintética com aspas.

Manipulando a equação 29 de forma a de fato separar as variáveis, podemos reescrevê-la no seguinte formato.

$$\frac{\dot{I}}{c^2 I} = \frac{F''}{F} \quad (30)$$

Considerando que a equação 30 é formada por quantidades constantes de ambos os lados é possível propor a igualdade a seguir, em que k representa uma constante arbitrária.

$$\frac{\dot{I}}{c^2 I} = \frac{F''}{F} = k \quad (31)$$

A equação 31 divide-se dando origem a duas equações diferenciais ordinárias expressas pelas equações 32 e 33.

$$\dot{I} - c^2 k I = 0 \quad (32)$$

$$F'' - k F = 0 \quad (33)$$

O valor da constante k pode ser determinado como positivo, negativo ou nulo, a depender das condições de contorno do problema fazendo alguns testes lógicos. Nesse problema, em específico, pode-se provar sem demais complicações que a constante deve ser negativa. Assim, adota-se uma formulação quadrada $k = -p^2$ para facilitar nos cálculos posteriores.

Substituindo a constante negativa nas equações 32 e 33, chega-se a:

$$\dot{I} + c^2 p^2 I = 0 \quad (34)$$

$$F'' + p^2 F = 0 \quad (35)$$

Com técnicas simples de resolução de equações ordinárias de segunda ordem é possível constatar que a solução geral das equações 34 e 35 são dadas respectivamente pelas seguintes expressões.

$$F_n(x) = A_n \cos(px) + B_n \sin(px) \quad (36)$$

$$G_n(x) = C_n \cos(\lambda_n t) + D_n \sin(\lambda_n t) \quad (37)$$

Substituindo as equações 36 e 37 na equação 28, obtêm-se a expressão para a solução geral da EDP.

$$u(x, t) = (A_n \cos(px) + B_n \sin(px))(C_n \cos(\lambda_n t) + D_n \sin(\lambda_n t)) \quad (38)$$

De forma a sintetizar didaticamente o método de separação de variáveis, traçamos a seguir um algoritmo do método:

- I. Aplica-se a substituição $u(x,t)=F(x)G(t)$ à EDP em análise;
- II. Separa-se as variáveis em lados diferentes da equação;
- III. Presume-se que as funções são constantes, tornando possível gerar duas EDO's;
- IV. Solucionam-se as EDO's;
- V. Substituem-se as soluções gerais na fórmula de separação de variáveis.

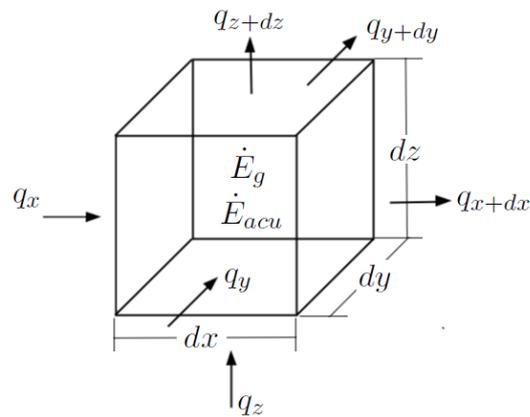
DESENVOLVIMENTO MATEMÁTICO

No âmbito da transferência de calor os problemas puramente condutivos assumem o papel de protagonizar efeitos físicos em diversas aplicações práticas na engenharia. Desse fato surge a necessidade por parte dos engenheiros mecânicos, em principal, de apresentarem autoridade sobre a modelagem e conceito de fenômenos como esses, seja para uso em pesquisa científica ou uso em aplicações práticas industriais.

De forma a representar esse conjunto de problemas condutivos de maneira generalizada o princípio de conservação de energia é invocado, com vistas na dedução de um modelo matemático centrado em uma equação diferencial parcial de uso versátil.

Para tanto, inicia-se com um balanço de energia em um material arbitrário, no qual há um campo tridimensional de temperatura e pode haver geração e acumulação de energia térmica. Considera-se um volume de controle (VC) infinitesimal do material ilustrado na figura 2, computando em todas as suas faces os fluxos energéticos de entrada e saída, tal como quantidades geradas ou acumulados no VC (DEWITT; INCROPERA, 2014).

Figura 2: Volume de Controle Infinitesimal de Análise



Fonte: Elaborado pelo autor

Os fluxos de calor condutivos de entrada q_x , q_y e q_z seguem a equação de taxa dada pela Lei de Fourier e posta abaixo de forma escalar como componente do fluxo em uma direção arbitrária.

$$q_n'' = -k_n \frac{\partial T}{\partial n} \quad (39)$$

Uma vez que, a energia pode ser gerada e acumulada dentro do elemento de análise, os fluxos de saída são de forma geral diferentes dos de entrada, podendo ser modelados por uma expansão em série de Taylor em primeira ordem como mostrado nas expressões 40, 41 e 42.

$$q_x + dx = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \quad (40)$$

$$q_y + dy = q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy \quad (41)$$

$$q_z + dz = q_z + \frac{\partial q_z}{\partial z} dz \quad (42)$$

Além dos fluxos de entrada e saída a energia gerada e acumulada dentro do volume do controle também devem ser modelados matematicamente de acordo. Segue abaixo sua estrutura.

$$E_{ger} = q dx dy dz \quad (43)$$

$$E_{acu} = \rho c p \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dz \quad (44)$$

Dado que todos os termos do esquema da figura 2 estão devidamente expressados em sua forma correta é possível escrever a ideia do balanço de energia térmica que tem seu

fundamento na primeira lei da termodinâmica. O balanço térmico no volume de controle é mostrado abaixo.

$$E_{ent} = E_{sai} + E_{ger} = E_{acu} \quad (45)$$

Substituindo as equações 40, 41, 42, 43, 44 na conservação de energia dada pela expressão 45, tem-se em dois passos:

$$q_x + q_y + q_z - (q_{x+dx} + q_{y+dy} + q_{z+dz}) + q dx dy dz = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dz \quad (46)$$

$$-\frac{\partial q_x}{\partial x} dx - \frac{\partial q_y}{\partial y} dy - \frac{\partial q_z}{\partial z} dz + q dx dy dz = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dz \quad (47)$$

Usando como base o conceito de equação de taxa condutivo da expressão 39 as derivadas dos fluxos da equação 47 podem ser feitas com facilidade e facilmente chegamos a:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] + q = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (48)$$

A equação acima é chamada Equação Geral da Difusão Térmica ou ainda Equação de Fourier-Biot. Sua importância reside no fato da potencialidade de computar numa escrita diferencial a modelagem matemática de qualquer problema puramente convectivo generalizado, o que dá ao engenheiro uma ferramenta fantástica como ponto de partida para a solução de problemas condutivos simples e complexos, pois, induz um pensamento que converge do geral ao caso específico.

Para melhorar um pouco a análise geral da Equação de Fourier-Biot vamos adotar a hipótese de que o meio em que o calor se propaga é isotrópico, ou seja, apresenta as mesmas propriedades mecânicas e termo físicas e todas as três direções ordenadas. Dessa forma a equação 48 fica simplificada nos moldes da 49, mostrada abaixo.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{q}{k} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (49)$$

O termo β é a difusividade térmica do meio, e pode ser definida por:

$$\beta = \frac{k}{\rho c_p} \quad (50)$$

Uma análise rápida na equação 49 revela sua real complexidade de solução. Cada uma de suas derivadas parciais espaciais do lado esquerdo da equação necessita de duas condições de contorno para ser solucionada e o conhecimento de uma condição inicial do campo de temperatura também é necessário para atender a derivada temporal do lado direito da equação.

MODELAGEM NA ENGENHARIA

No contexto amplo dos problemas condutivos englobados pela equação geral 48 estamos aqui particularmente interessados nos problemas de condução unidimensional em regime transiente. Portanto, agora a amplitude da análise é restrita assim como sua complexidade. Faz-se isso através das hipóteses simplificadoras abaixo, de forma a adequar nossa modelagem ao problema foco.

- I. Condução unidimensional;
- II. Condução sem geração interna de calor;
- III. Regime Transiente;
- IV. Material Isotrópico;

V.

Aplicando as hipóteses simplificadoras listadas acima na equação 48 é possível chegar a uma equação de governo de seguinte formato.

Com isso a equação (18) adquire a forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (51)$$

Para facilitar os cálculos, substituiremos a constante de difusividade térmica que acompanha a derivada em relação ao espaço por α^2 . A substituição será feita para uma única constante quadrada para facilitar os cálculos que serão realizados. Com isso a equação 51 adquire a forma abaixo.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (52)$$

A equação 52 trata-se de uma EDP, pois a função potencial u depende de duas variáveis, posição e tempo (x, t). Essa equação exige três condições, duas condições de contorno, ou seja, o estado em que se encontra as pontas do corpo de estudo, e uma condição inicial, ou seja, o estado inicial de todo o corpo.

O Método de Separação de Variáveis tem como primeiro passo de sua implementação a proposição de uma solução para a equação de governo 51 que dependa apenas de funções de uma variável, correlatas as coordenadas espaciais x e y em função das quais o campo potencial $u(x,t)$ deve ser encontrado.

$$u_n(x, t) = F(x)G(t) \quad (53)$$

Substituindo a proposta dada pela equação 54 na equação de governo 52, temos:

$$\frac{\dot{G}}{\alpha^2 G} = \frac{F''}{F} \quad (54)$$

Por inspeção é possível provar que a equação 54 pode ser igualada a uma constante que deve ser necessariamente negativa, dessa forma, pode escrever:

$$\frac{\dot{G}}{\alpha^2 G} = \frac{F''}{F} = -p^2 \quad (55)$$

Separando a equação 55 em duas equações ordinárias, tem-se:

$$F'' - p^2 F = 0 \quad (56)$$

$$\dot{G} - \alpha^2 p^2 G = 0 \quad (57)$$

A solução geral da equação 56 pode ser escrita como:

$$F_n(x) = c_1 \cos(px) + c_2 \sin(px) \quad (58)$$

Para maior sintetização, assumindo-se que $\lambda_n^2 = \alpha^2 p^2$, a solução geral da equação 57 pode ser apresentada por:

$$G_n(t) = c_3 e^{-\lambda_n^2 t} \quad (59)$$

Retornando as soluções gerais de cada EDO dadas pelas equações 58 e 59 na proposta original de solução e somando-se infinitas soluções, temos uma expressão algébrica geral independente das condições de contorno e iniciais do problema dada por:

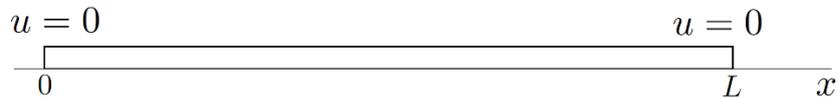
$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} c_1 \sin px + c_2 \cos px \right\} \{c_3 e^{-\lambda_n^2 t}\} \quad (60)$$

A *posteriori* serão resolvidos dois casos com diferentes condições de contorno e com uma função de condição inicial genérica de forma a determinar as constantes e conhecer o campo transiente do campo potencial u na barra.

Caso I: Extremidades com temperatura zero

Um esquema representativo do domínio físico do problema é dado abaixo para ilustrar um problema de calor no qual as condições de distribuição de temperatura no interior da barra variam com o tempo.

Figura 3: Geometria e Condições de Contorno



Fonte: Elaborado pelo autor

As condições de contorno e iniciais que caracterizam os problemas seguem abaixo:

$$u(0, t) = 0 \quad \text{Face Esquerda} \quad (61a)$$

$$u(L, t) = 0 \quad \text{Face Direita} \quad (61b)$$

$$u(x, 0) = f(x) \quad \text{Condição Inicial da Barra} \quad (61c)$$

Aplicando a condição de contorno 61a na equação solução 53, tem-se:

$$u_n(0, t) = F(0)G(t) = 0 \rightarrow F(0) = 0 \rightarrow C_1 = 0 \quad (62)$$

Portanto a função exclusiva de x reduz-se a:

$$F_n(x) = C_2 \text{sen} px \quad (63)$$

Impondo agora a condição de contorno 61b temos que:

$$u_n(L, t) = F(L)G(t) = 0 \rightarrow F(L) = 0 \quad (64)$$

Para a obediência da relação encontrada em 64 é necessário que:

$$C_2 \text{sen}(pL) = 0 \rightarrow \text{sen}(pL) \rightarrow pL = n\pi \rightarrow p = \frac{n\pi}{L} \quad (65)$$

Portanto as infinitas soluções de F que atendem às condições de contorno especificadas são:

$$F_n(x) = \text{sen} \frac{n\pi x}{L} \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (66)$$

Com a função espacial já determinada em concordância com as condições de contorno, vamos utilizar sua versão da equação 66 juntamente com a solução geral encontrada na equação 59 e retornar a equação de solução geral 60, tem-se:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} c_2 \text{sen} px \right\} \{c_3 e^{-\lambda_n^2 t}\} \quad (67)$$

Agrupando-se às constantes presentes na expressão 67 de forma a compactar em uma nova constante $c_n = c_2 c_3$.

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{sen} \frac{n\pi x}{L} e^{-\lambda_n^2 t} \quad (68)$$

Uma vez possuindo a solução geral de u a menos de uma constante, esta pode ser determinada utilizando a condição inicial conhecida, resultando em:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{sen} \frac{n\pi x}{L} = f(x) \quad (69)$$

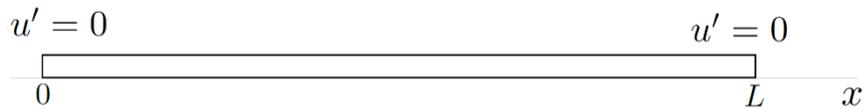
Comparando a equação 69 com a série de Fourier conceitual introduzida na expressão 22, é possível determinar o valor da constante C_n através das fórmulas de Euler, como já modelado a seguir.

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \text{sen} \frac{n\pi x}{L} dx \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (70)$$

Caso II: Extremidades Isoladas

Na segunda situação considera-se uma barra com extremidades sendo isoladas, ou seja, com fluxo de calor nulo em seus contornos. Pode ser apreciado a seguir um esquema que representa a situação física em questão.

Figura 4: Representação gráfica do objeto de estudo



Fonte: Elaborado pelo autor

As condições de contorno e iniciais que caracterizam este segundo caso são postas pelo conjunto de equações 71.

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = 0 \quad \text{Face Esquerda} \quad (71a)$$

$$\frac{\partial u(L, t)}{\partial x} = 0 \quad \text{Face Direita} \quad (71b)$$

$$u(x, 0) = f(x) \quad \text{Condição Inicial da Barra} \quad (71c)$$

Em primeiro momento, vamos aplicar a condição de contorno 71a na proposta 53.

$$u'_n(0, t) = F'(0)G(t) = 0 \rightarrow F'(0) = 0 \quad (72)$$

É viável mostrar a estrutura diferenciada da função F para então aplicar efetivamente a condição de contorno.

$$F'_n(x) = -c_1 p \text{sen}(px) + c_2 p \text{cos}(px) \rightarrow F'(0) = 0 \rightarrow c_2 = 0 \quad (73)$$

Reescreve-se a função exclusiva de x novamente da seguinte forma:

$$F_n(x) = c_1 \text{cos}(px) \quad (74)$$

Aplicando-se agora a condição de contorno 71b na equação 74, temos:

$$F'_n(L) = -c_1 p \text{sen}(pL) = 0 \rightarrow \text{sen}(pL) = 0 \rightarrow pL = n\pi \rightarrow p = \frac{n\pi}{L} \quad (75)$$

As infinitas soluções que atendem às condições de contorno em x são dadas por:

$$F_n(x) = \text{cos}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (76)$$

Com a função espacial já determinada em concordância com as condições de contorno, vamos utilizar sua versão da equação 76 juntamente com a solução geral encontrada na equação 76 e retornar a equação de solução geral 60, tem-se:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} c_1 \text{cos}(px) \right\} \{c_3 e^{-\lambda_n^2 t}\} \quad (77)$$

Agrupando-se às constantes presentes na expressão 77 de forma a compactar em uma nova constante $c_n = c_1 c_3$.

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{cos}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\lambda_n^2 t} \quad (78)$$

Uma vez possuindo a solução geral de u a menos de uma constante, esta pode ser determinada utilizando a condição inicial conhecida, resultando em:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{cos}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = f(x) \quad (79)$$

Comparando a equação 79 com a série de Fourier conceitual introduzida na expressão 22, é possível determinar o valor da constante c_n através das fórmulas de Euler, como já modelado a seguir.

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (80)$$

CONCLUSÃO

A transferência de calor faz parte do triângulo singular da engenharia mecânica que contempla as pesquisas em termofluidos, o que torna sua compreensão de suma importância para um engenheiro em formação, de modo que possa completar a graduação plenamente equipado para lidar com os problemas a serem enfrentados na profissão. Para tanto não só é necessário gerar resultados, mas compreender como chegar a eles, para que assim seja capaz de adaptar a solução a cada situação proposta.

O conhecimento adquirido decorrente do problema de condução de calor unidimensional em regime transiente pode ser expandido para uma análise bidimensional ou tridimensional. Nesse ponto é importante salientar que as técnicas envolvendo equações diferenciais e física-matemática de forma mais robusta são recorrentes em mesmo em problema extremamente diferentes entre si, em outras palavras, as mesmas ferramentas podem ser utilizadas para a solução de diversos tipos de situações físicas.

Ao longo da modelagem matemática do problema posto nota-se a importância dos conhecimentos e técnicas da seara de equações diferenciais. Em linhas gerais, diversos fenômenos físicos são governados por uma equação diferencial, portanto saber resolvê-las é crucial. Por fim, é possível dizer que a disciplinas de equações diferenciais constitui o ramo central do que denominamos de modelagem matemática para engenharia moderna, sendo desta forma tema de relevância primal dentro de qualquer curso de engenharia.

REFERÊNCIAS

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de contorno** (9ª edição). LTC Editora, Rio de Janeiro, 2014.

DEWITT, David P.; INCROPERA, Frank P. **Fundamentos de Transferência de Calor e de Massa**. Livros Técnicos e Científicos (LTC) Editora SA. 7.ed. Rio de Janeiro. 2014.

KREITH, Frank. **Princípios de transferência de calor**. Cengage Learning Editores, 2012.

KREYSZIG, E. **Matemática superior para engenharia**. Livros técnicos e científicos, 2009.

ÇENGEL, Yunus A. **Transferência de Calor e Massa: Uma Abordagem Prática**, 3ª Edição. São Paulo, 2009.

ÇENGEL, Y. A.; III, W. J. P. **Equações Diferenciais**. Porto Alegre: AMGH Editora, 2014.