

REVISTA CIENTÍFICA



ESFERA ACADÊMICA
TECNOLOGIA

ISSN 2526-4141

REVISTA ESFERA ACADÊMICA TECNOLOGIA

Volume 1, número 1

Vitória

2016

EXPEDIENTE

Publicação Semestral

ISSN 2526-4141

Temática: Tecnologia

Revisão Português

Maria Gabriela Verediano Balardino

Capa

Marketing Faculdade Brasileira Multivix-Vitória

Os artigos publicados nesta revista são de inteira responsabilidade de seus autores e não refletem, necessariamente, os pensamentos dos editores.

Correspondências

Coordenação de Pesquisa e Extensão Faculdade Brasileira Multivix-Vitória

Rua José Alves, 301, Goiabeiras, Vitória/ES | 29075-080

E-mail: pesquisa.vitoria@multivix.edu.br

FACULDADE BRASILEIRA MULTIVIX-VITÓRIA

DIRETOR EXECUTIVO

Tadeu Antônio de Oliveira Penina

DIRETORA ACADÊMICA

Eliene Maria Gava Ferrão Penina

DIRETOR ADMINISTRATIVO E FINANCEIRO

Fernando Bom Costalonga

CONSELHO EDITORIAL

Alexandra Barbosa Oliveira
Caroline de Queiroz Costa Vitorino
Eliene Maria Gava Ferrão Penina

Karine Lourenzone de Araujo Dasilio
Michelle Moreira
Patricia de Oliveira Penina

ASSESSORIA EDITORIAL

Karine Lourenzone de Araujo Dasilio

Patricia de Oliveira Penina

ASSESSORIA CIENTÍFICA

Andrielly Moutinho Knupp
Farley Correia Sardinha
Poline Fernandes Fialho

SUMÁRIO

SISTEMAS DE TELEFONIA: ESTUDO DO DIMENSIONAMENTO DE UM CALL CENTER UTILIZANDO A TEORIA DAS FILAS.....	6
--	----------

Valter Rodrigues Vasconcelos Junior, Fernando Luiz Trazzi Junior.

APLICAÇÕES DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS NA MODELAGEM MATEMÁTICA PARA ENGENHARIA: UMA INTRODUÇÃO À TEORIA DA CAMADA LIMITE.....	18
--	-----------

Moacir César da Vitória Júnior, Natan Sian das Neves, Roger da Silva Rodrigues, Vitor Pancieri Pinheiro.

APLICAÇÕES DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS EM MODELAGEM MATEMÁTICA PARA ENGENHARIA: A TEORIA DA VIGA ELÁSTICA.....	36
--	-----------

Ana Clara Deps, Letícia Frauches Pereira, Moacir César da Vitória Júnior, Natan Sian das Neves, Roger da Silva Rodrigues, Vitor Pancieri Pinheiro.

APLICAÇÕES DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS EM MODELAGEM MATEMÁTICA PARA ENGENHARIA: UM ESTUDO SOBRE A FLAMBAGEM DE COLUNAS.....	45
---	-----------

Gemilson Leandro da Silva Aguiar, Moacir César da Vitória Júnior, Natan Sian das Neves, Roger da Silva Rodrigues, Vitor Pancieri Pinheiro.

ADIÇÃO DE NANOTUBOS DE CARBONO EM CIMENTO.....	57
---	-----------

Wandercleiton da Silva Cardoso, Arthur Eduardo Moreira, Marco Antônio Valli, João Pinto, Vitor Toniato Campana.

ECONOMIA DE ENERGIA COM DISPOSITIVOS INTELIGENTES: ESTUDO DE CASO NA FACULDADE MULTIVIX VITÓRIA.....	63
---	-----------

Wandercleiton Cardoso, Brena Porcino, Johnnata Júlio, Júlio Cesar, Magno Alves, Raul Barbosa, Odimar Rocha, Otavio Baioco, Vitor Campos.

ELETROGALVANIZAÇÃO NA INDUSTRIA AUTOMOBILISTICA.....	70
---	-----------

Wandercleiton da Silva Cardoso, Brena da Silva Porcino, Vitor Toniato Campana.

MOTOR DE COMBUSTÃO INTERNA DE PISTÕES ROTATIVOS TRIANGULARES CURVILÍNEOS: WANKEL.....	75
--	-----------

Wandercleiton da Silva Cardoso, Vitor Toniato Campana, Alex Borges do Nascimento, Fabiano Steiner Monteiro, Franciely Costa Delunardo, Gesiely Barcelos Matheus.

APLICAÇÕES DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS NA MODELAGEM MATEMÁTICA PARA ENGENHARIA: UM ESTUDO DA CONDUÇÃO DE CALOR UNIDIMENSIONAL EM REGIME TRANSIENTE.....	81
---	-----------

Adriano Shineyder de Moraes Ramos, Moacir César da Vitória Júnior, Natan Sian das Neves, Roger da Silva Rodrigues, Vitor Pancieri Pinheiro.

APRESENTAÇÃO

Vivemos um momento histórico onde a informação e o conhecimento são elementos vitais na configuração dos novos formatos das relações sociais. Nesse mundo onde as tecnologias e as redes sociais transformam a realidade a cada instante, recai sobre os sujeitos sociais a exigência contínua de uma formação profissional que os torne aptos a atenderem as demandas de um mercado cada vez mais exigente e competitivo.

Nesse “admirável mundo novo”, a informação como ferramenta de criação do conhecimento torna-se um elemento decisivo na produção de bens materiais que, por consequência, resultarão na melhoria da qualidade de vida das populações.

Ciente de seu papel social e dos desafios impostos pela contemporaneidade, a Faculdade Brasileira/Multivix Vitória insere-se no contexto de transformações das profissões e da sociedade com muita responsabilidade através do registro dos avanços das pesquisas nas diversas áreas.

É com grande satisfação que estamos lançando o primeiro exemplar da Revista Científica ESFERA ACADÊMICA TECNOLOGIA aportando contribuições da tecnologia.

Nosso agradecimento a toda equipe que auxiliou na sua produção fortalecendo cada vez mais nossos vínculos institucionais.

Conselho Editorial
Revista Científica ESFERA ACADÊMICA TECNOLOGIA

SISTEMAS DE TELEFONIA: ESTUDO DO DIMENSIONAMENTO DE UM CALL CENTER UTILIZANDO A TEORIA DAS FILAS

Valter Rodrigues Vasconcelos Junior¹, Fernando Luiz Trazzi Junior²

1. Discente do Curso de Engenharia Elétrica na Faculdade Brasileira – MULTIVIX
2. Mestre em Engenharia Aeronáutica, docente do Curso de Engenharia Elétrica na Faculdade Brasileira – MULTIVIX

RESUMO

O Centro Integrado Operacional de Defesa Social (CIODES) foi criado no ano de 2004 para integrar o atendimento a alguns órgãos de Segurança Pública, como Polícia Militar, Bombeiros Militar e Polícia Civil. O presente artigo tem por objetivo verificar se o referido centro suporta o número de ligações diárias demandadas pelo cidadão que necessita do serviço em solo capixaba, tal como o seu tempo de espera para atendimento, utilizando a Teoria das Filas. A partir deste estudo de caso, poderá se verificar se o CIODES necessita de mais atendentes ou de um novo sistema de atendimento, afim de prestar um melhor serviço à população abrangida por esse importante serviço.

Palavras-chave: Tráfego.Telefônico.Call center.Teoria.Filas.

ABSTRACT

Operating Integrated Center for Social Defense (CIODES) was created in 2004 to integrate the care of some organs of public security, as Military Police, Fire and Civil Military Police. This article aims to verify whether the center supports the number of daily connections demanded by citizens who need service in capixaba soil, such as your waiting time for service, using the Theory of Queues. From this case study, you can check whether the CIODES needs more attendants or a new system of care in order to provide better service to the population covered by this important service.

Keywords: Telephone.Traffic.Call center.Queue. Theory.

INTRODUÇÃO

No mundo empresarial, uma boa interface de comunicação entre empresa e cliente é essencial. A falta ou a precariedade desse meio pode determinar o fracasso ou insucesso do negócio, e da mesma forma, um meio bem estruturado pode levar essa empresa ao sucesso (ZEITHAML et al., 2014).

A comunicação entre empresa e cliente pode acontecer de várias maneiras, tais como telefone, e-mail, atendimento pessoal ou correspondência, sendo que a estrutura telefônica demonstra mais abrangência e notoriedade em território nacional.

Zeithaml et al. (2014) diz que, em geral, nas grandes empresas, o atendimento telefônico se realiza através de call centers, que contam com uma central telefônica e um número de atendentes que varia com a demanda da empresa.

Ao entrar em contato com um call center, um cliente espera rapidez e objetividade em seu atendimento, além da resolução do problema que o acomete. De forma significativa, a demora no atendimento acarreta no descontentamento daquele que deseja ser atendido, portanto, é de suma importância o correto dimensionamento de um call center, que possibilitará, com maior rapidez, o início do atendimento ao cliente.

De forma similar, os órgãos que compõem o Sistema de Segurança Pública, como a Polícia Militar, devem possuir um call center bem projetado, de forma que a espera do cidadão, que pode ser visto como cliente, seja mínima.

Imagine uma pessoa que presencie um infrator roubando um estabelecimento bancário. Naturalmente, essa pessoa tomará providências para que tal infrator não consiga concretizar o roubo em andamento e entrará em contato com a Polícia, que poderá impedir o ato injusto ou minimizar as possíveis ações que o cidadão em conflito com a lei poderá vir a praticar. A partir da imaginação de que o cidadão que presencia o fato tenha que aguardar cerca de 30 minutos na linha para comunicar o fato em questão. Evidentemente, as consequências de tal espera poderiam ser desastrosas: por conta da espera para falar com a polícia, o banco foi roubado; o cidadão de bem que queria comunicar o fato desenvolve um sentimento de descrédito para com a Polícia; é gerada uma sensação de insegurança no local e adjacências; haverá uma negatização da imagem institucional na mídia; haverá redução na qualidade do serviço policial como um todo; dentre outras consequências.

Diante do cenário atual, que demonstra crescimento populacional no Estado, e tendo como base que o Centro Operacional de Defesa Social (CIODES) foi criado no ano de 2004, passando por algumas manutenções e atualizações, formulou-se o seguinte problema de pesquisa: “O Call Center do CIODES consegue atender à demanda de ligações atual sem que o solicitante do serviço espere demasiadamente ou não consiga falar com um atendente?”

Na seara da Segurança Pública, mais especificamente, quando se fala de Polícia Militar, o número de ocorrências provenientes de atendimentos telefônicos tem grande expressão, sendo claramente dominante, logo, é relevante o estudo, projeto e implementação de um call center que atenda bem a população.

No Estado do Espírito Santo o CIODES é um projeto criado no ano de 2004 pela Secretaria de Segurança Pública do Espírito Santo (SESP-ES), que visa integrar em uma única estrutura, física e digital, diversos órgãos da Segurança Pública, como Polícia Militar, Polícia Civil e Bombeiros Militar. Dessa forma, o atendimento a estes órgãos fica concentrado nesse Centro, através do disque-emergência (190), que recebe milhares de ligações diárias, muitas delas envolvendo fatos emergenciais (ESPIRITO SANTO, 2015).

A partir da criação do CIODES, a Central de Atendimento de Emergências - 190 (CAE) torna-se peça principal para o atendimento ao cidadão (ESPÍRITO SANTO, 2014). Após o recebimento da chamada pelo operador do call center, “um atendimento eficiente à população envolve uma gama de fatores, como profissionalismo e eficiência do atendente, nível de ruídos na ligação, volume da ligação, presteza do atendente, treinamento, uso correto do sistema, dentre outros” (DAVENPORT, 1998, p.15). No entanto, mesmo com esses e outros fatores em conformidade com o esperado, é imprescindível e óbvio que o atendente consiga receber a ligação do solicitante.

Sendo assim, deve-se ter uma central telefônica que comporte a demanda de ligações recebidas, a qualquer dia e a qualquer hora, seja ela qual for. Além de comportar o número de ligações simultâneas, o tempo de espera do solicitante do serviço deverá ser mínima, sendo que este último é um dos fatores que mais influenciam na satisfação do cliente. Com

o dimensionamento correto, é possível melhorar o rendimento do sistema, assim como reduzir custos e direcionar melhor os recursos disponíveis.

Este estudo buscou estudar a porta primária para o atendimento telefônico, que é o dimensionamento e projeto corretos da central telefônica. A partir daí é possível se mensurar, com os critérios corretos, os fatores que garantem a qualidade no recebimento das chamadas, como o tempo de espera enfrentado pelo solicitante do serviço. O referido estudo analisou os dados do call center do CIODES no período de abril a setembro de 2015.

Neste trabalho foi verificado se a central telefônica do CIODES está corretamente dimensionada utilizando a Teoria das Filas, noções de probabilidade e estatística, e métodos desenvolvidos por Agner Karup Erlang como o método intitulado por Erlang C, a fim de proporcionar um atendimento telefônico de qualidade a quem necessitar, seja para acionar a Polícia Militar, o Corpo de Bombeiros Militar, a Polícia Civil, a Guarda Municipal de Vitória, ou as demais instituições que integram o Centro. Além disso, foi verificado também, de forma teórica, a capacidade de atendimentos diários do Centro Integrado Operacional de Defesa Social, estimando um tempo limite de espera. Logo após, foram coletados dados do sistema vigente, confrontando-os com os resultados teóricos obtidos.

O CIODES, local onde esse estudo foi realizado, fica localizado no prédio da Secretaria de Segurança Pública e Defesa Social (SESP-ES), situado na Avenida Marechal Mascarenhas de Moraes, 2355, Bento Ferreira, Vitória-ES.

METODOLOGIA

Inicialmente, a metodologia aplicada a este artigo se deu com base em pesquisa bibliográfica, sendo elaborada a partir de material já publicado por diversos autores da área de Telefonia e Telecomunicações, tendo como suporte livros, artigos, cartilhas e material disponibilizado na internet. Em principal, foi utilizado o estudo da Teoria das Filas.

No segundo momento, foi utilizada a pesquisa qualitativa, uma vez que existe uma relação dinâmica entre o mundo real e o objeto aqui estudado. Nessa parte da pesquisa, o Centro Integrado Operacional de Defesa Social, situado no prédio da Secretaria de Segurança Pública do Espírito Santo, foi a fonte direta da coleta de dados.

Para se compreender o dimensionamento de um call center, é necessário entender alguns conceitos básicos de Telefonia. De modo simples, um sistema de Telefonia é um processo estocástico, ou seja, um processo de sequências aleatórias dependentes do tempo. Esse e outros conceitos indispensáveis ao entendimento do problema serão abordados nos tópicos seguintes.

NOÇÕES DE ENGENHARIA DE TRÁFEGO

Um call center recebe as ligações através de uma ou mais centrais telefônicas. De acordo com Pinheiro (2004), uma central telefônica, que utiliza um sistema de comutação, pode ter N circuitos de entrada, e M circuitos de saída, dependendo de seu projeto.

Para que uma ligação seja atendida, uma entrada é conectada a uma saída, que permanecerão unidas durante o tempo da conexão. Após encerrada a conexão, essa saída

poderá atender uma outra entrada qualquer. Se o número M de circuitos de saída for menor que o número N de entrada, ocorrerá, no momento em que o sistema tiver M conexões, o bloqueio da próxima conexão, pois esta não conseguirá seguir no sistema através de um canal de saída de forma imediata (PINHEIRO, 2004, p.109-110).

Em seu estudo, Marins (2011) diz que o bloqueio de uma ligação pode ocorrer com ou sem espera. Em um sistema sem esperas, o cliente é imediatamente excluído, ao passo de que em um sistema com esperas, haverá a formação de filas, que serão abordadas neste artigo em momento posterior.

Para o dimensionamento de uma central telefônica, é estimada uma intensidade de tráfego para o sistema, dada em Erlangs, e em seguida são avaliados alguns fatores do sistema, como a probabilidade de bloqueio para diferentes números de canais de atendimento e o tempo de permanência no sistema.

PROCESSOS MARKOVIANOS E NÃO MARKOVIANOS

Segundo Pinheiro (2004), um processo é dito markoviano quando os próximos estados do processo não dependem dos estados anteriores, sendo dependentes apenas do estado atual. Para a análise de um processo markoviano se faz necessário apenas conhecer o seu estado anterior, uma vez que o sistema não possui memória.

Por outro lado, um processo não markoviano é aquele em que se faz necessário “caracterizar o comportamento futuro do sistema é necessário conhecer o seu estado atual e se ter informações sobre o passado” (MARINS, 2011, p.11).

Os processos aqui estudados são do tipo markovianos, que são aplicados na modelagem dos sistemas de filas.

A TEORIA DAS FILAS

Segundo Tôres (1966), uma fila, na sua forma mais familiar, é gerada quando clientes, chegando a um posto de atendimento, ou servidor, não possam ser atendidas prontamente, tendo, ocasionalmente, que aguardar para tanto, sendo que esse grupo de clientes que aguardam é a fila.

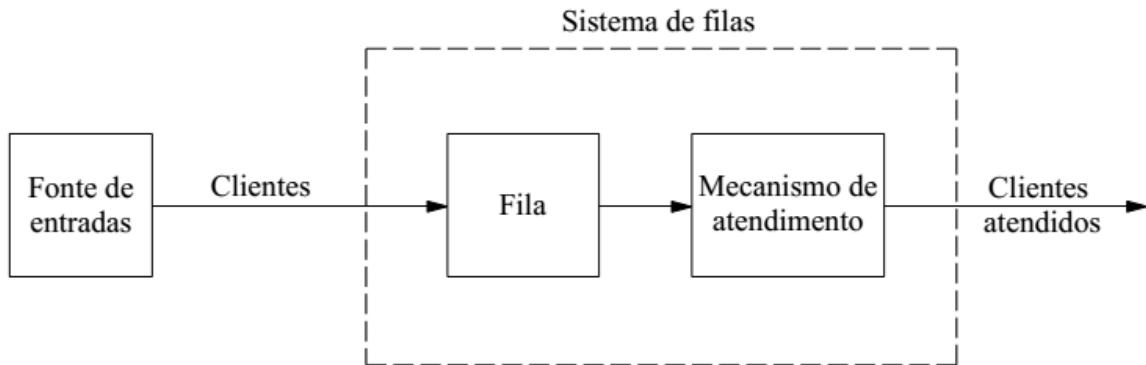
Em sua essência, “a Teoria das Filas de espera é um método estatístico que permite estimar as demoras que ocorrem quando um serviço tem de ser proporcionado a clientes cuja chegada se dê ao acaso” (TÔRES, 1966, p.1), ou seja, é uma ferramenta matemática que trata de eventos aleatórios.

Essa teoria estuda o sistema de filas, proporcionando uma maneira de definir o tal sistema matematicamente. Com a Teoria das Filas é possível prever também o tempo de espera em filas, além de respostas prováveis de um dado sistema. Além disso, é possível mensurar o comportamento de um sistema de filas e seus parâmetros, como tempo de espera médio e a probabilidade de formação de filas. Há então a “possibilidade de testar possíveis modificações em Sistemas de Filas que contribuam para melhorar seu rendimento, e obter subsídios para escolha da melhor alternativa de ação” (MARINS, 2011, p.3).

CARACTERÍSTICAS DE UM SISTEMA DE FILA

Um sistema de filas possui algumas características básicas, que interagem entre si, como processo de chegada, tempo de atendimento, o número de canais de serviço, o tamanho do sistema de fila, a população de clientes e a disciplina de atendimento.

Figura 1 – Estrutura básica de um sistema de fila (MARINS, 2011, p. 33)



Como se trata de um processo estocástico, vamos assumir que os clientes do sistema acima estruturado chegam em instantes t_1, t_2, t_3, \dots , em que o tempo de interchegadas, dado por $\tau_j = t_j - t_{j-1}$ é uma variável aleatória.

O tempo de atendimento é o tempo gasto por cada cliente nos canais de serviço, que também é uma variável aleatória.

O número de canais de serviço pode assumir três formas distintas:

- **Servidor único (single server)** – um cliente é atendido por vez;
- **Servidor múltiplo (multi-server)** – existe um número m de servidores que podem atender um número m de clientes ao mesmo tempo;
- **Servidor Infinito (infinite server)** – todo cliente que chega é atendido sem espera.

Segundo Tôrres (1966), a capacidade do sistema é medida de acordo com o número total de clientes que ela comporta, estejam eles entrando no sistema, esperando para serem atendidos ou em atendimento. A capacidade pode ser limitada por questões de espaço, custo ou para evitar altos tempos de espera.

A população de clientes é a quantidade de usuários em potencial que podem vir a utilizar o sistema em um determinado momento. A taxa de chegadas dependerá da população de clientes: será constante para população infinita, e variável para uma população finita.

A disciplina de serviço nada mais é que o método de atendimento escolhido, podendo ser ele FCFS (First Come, First Served), FIFO (First In, First Out), LCFS (Last Come, First Served), LIFO (Last In, First Out), SIRO (Service in a Random Order), RR (Round Robin), dentre outras.

Para Arenales et al. (2007), um sistema de filas é classificado por suas características, e para isso, utiliza-se a notação de Kendall-Lee:

A / S / m / B / K / DS

Em que:

A = Distribuição de tempo interchegada

S = Distribuição de probabilidades dos tempos de atendimento

m = Número de canais de serviço simultâneo (servidores)

B = Quantidade de Buffers ou capacidade do sistema

K = Tamanho da população

DS = Disciplina de serviço

É possível ainda classificar as divisões utilizadas para tempo de interchegada e distribuição de tempo de serviço, conforme tabela abaixo:

Tabela 1 – Disciplinas de atendimento

SÍMBOLO	CLASSIFICAÇÃO
M	Exponencial (Memoryless)
E_k	Erlang, com parâmetro K
H_k	Hiperexponencial, com parâmetro K
D	Determinístico
G	Distribuição genérica (sem variância)

Fonte: Os autores

Para se determinar qual o modelo de fila mais adequado para o problema em estudo foram necessárias a verificação dos seguintes pontos:

- O processo de chegada e de serviço são processos markovianos que não dependem dos estados passados, apenas do estado anterior (o sistema não possui memória);
- O número de servidores é m , constante;
- No caso de formação de uma fila de espera, esta comportará uma quantidade muito grande de clientes, dessa forma, a capacidade do sistema pode ser considerada como infinita;
- A população de usuários que podem vir a utilizar o sistema é muito grande, podendo ser considerada como infinita;
- A disciplina de serviço é FCFS, pois o primeiro a chegar ao sistema, será o primeiro a ser atendido.

Logo, nesse artigo, foi estudado um sistema $M/M/m/\infty/\infty/FCFS$, que pela notação de Kendall-Lee, pode ser descrito como apenas por $M/M/m$.

O SISTEMA $M/M/m$

Analisando a notação, extrai-se que o sistema possui distribuição de tempo interchegada e distribuição de probabilidades de atendimento de forma exponencial, m servidores iguais de atendimento, um número de capacidade e população infinito, e a disciplina de atendimento FCFS, ou seja, o primeiro a chegar na fila será o primeiro a ser atendido.

Para o estudo desse sistema é necessário saber a taxa de chegadas do sistema, a taxa de serviço do sistema e o número de servidores. Com isso, é possível determinar as probabilidades em estudo no presente artigo, como o tempo em que um cliente aguarda na fila antes de ser atendido.

Para um sistema do tipo M/M/m, considera-se que a taxa de chegadas do sistema é constante:

$$\lambda_n = \lambda \text{ para } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

A taxa média de atendimentos do sistema é dada pelo produto do número de clientes pela taxa média de atendimentos dos servidores, se o número de clientes for menor que o número de servidores, ou pelo produto do número de servidores pela taxa de atendimentos médios dos servidores, no caso contrário:

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & \text{se } 0 \leq n \leq m \\ m\mu & \text{se } n \geq m \end{cases}$$

De acordo com Pinheiro (2004), a taxa de serviço, ou a utilização média do servidor, é igual à taxa de chegadas total dividido pelo total da média de atendimento por servidor, e para que o sistema de filas seja estável, deve ser menor que 1:

$$\rho = \frac{\lambda}{m\mu} < 1$$

A quantidade média de clientes no sistema depende da taxa de serviço, do número de servidores e da probabilidade de bloqueio do sistema:

$$n = m \cdot \rho + \frac{\rho \cdot P_q}{(1-\rho)}$$

A probabilidade de todos os servidores estarem ociosos é dada por:

$$P_0 = \left(\sum_{n=0}^{m-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^m}{m!} \frac{1}{1-\lambda/(m\mu)} \right)^{-1}$$

A probabilidade de todos os servidores estarem ocupados depende da taxa de serviço, da probabilidade de ociosidade do sistema e do número de servidores (equação de Erlang-C):

$$P_q = \left(\frac{P_0 (\rho \cdot m)^m}{m! (1-\rho)} \right)$$

Além disso, o comprimento esperado da fila, dado por L_q é:

$$L_q = \frac{P_0 \cdot (\lambda/\mu)^m \cdot \rho}{m! (1-\rho)^2}$$

O tempo de espera médio do sistema é dado por:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

De modo similar, o tempo de permanência médio no sistema é dado por:

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}$$

Com o referencial teórico supracitado, é possível realizar o estudo da CAE do CIODES, tal como estimar possíveis alterações no sistema e suas consequências.

APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS

O CAE funciona 24 horas por dia, 7 dias por semana, contando com 120 operadores distribuídos em 4 turnos de 6 horas cada, conforme tabela abaixo:

Tabela 2: Número de atendentes por turno

Horário	Postos
05-11h	18
11-17h	24
17-23h	28
23-05h	18

Fonte: CIODES

São 18 postos entre 05 e 11h, 24 postos entre 11 e 17h, 28 postos entre 13 e 23h e 18 postos entre 23 e 05h.

A partir desses dados, obtemos um total de 88 operadores por dia, e efetuando média simples, 22 operadores por turno.

Para o estudo em questão, foram coletados dados referentes à quantidade de ligações recebidas pelo call center do CIODES no período compreendido entre 01 de abril de 2015 à 30 de setembro de 2015, tal como o tempo médio de espera de cada solicitante em um servidor e a duração média das ligações recebidas.

No período supramencionado de seis meses foi atendido pelo CAE o total de 2.431.154 chamados. Por questões de acessibilidade da informação, não foi possível coletar a quantidade de chamadas de hora em hora, mas apenas a quantidade de ligações totais no semestre, portanto, a quantidade de ligações por mês, dia e hora médias foram aferidas por cálculo partindo do valor total no semestre, e os demais valores em decorrência deste.

Tabela 3: Média de ligações atendidas de abril a setembro de 2015:

Mês	Ligações recebidas
Abril/2015	405.192
Mai/2015	405.192
Junho/2015	405.192
Julho/2015	405.192
Agosto/2015	405.192
Setembro/2015	405.192

Média Mensal	405.192
---------------------	----------------

Fonte: CIODES

Tabela 4: Tempo médio de espera médio (W_q) e permanência (W) em um servidor:

Variável	Tempo em segundos
Tempo de espera médio na fila	7
Duração Média das ligações	43

Fonte: CIODES

Utilizando os dados coletados, obtemos os seguintes parâmetros:

$$\lambda = \frac{405.192}{30} = 13.506,40 \text{ chamadas/dia} = \frac{13.506,40}{24} = 562,77 \text{ chamadas/hora, o que equivale a}$$

$$\lambda = \mathbf{0,16 \text{ chamadas/segundo.}}$$

Para se chegar à taxa de atendimentos médio, temos:

$$\mu = \frac{1}{W - W_q} = \frac{1}{43 - 7}, \text{ portanto } \mu = \mathbf{0,028 \text{ chamadas/segundo}}$$

Com os valores de λ e μ , $\rho = \mathbf{0,26}$.

Diante disso, a probabilidade de encontrar todos os servidores ociosos é:

$$P_0 = \mathbf{0,0033 \approx 0\%}$$

O tempo de espera médio na fila é:

$$W_q \approx \mathbf{0 \text{ s}}$$

Logo, o tempo médio de permanência no sistema é:

$$W = \mathbf{35,71 \text{ s}}$$

No entanto, para resultados mais eficazes, devemos tomar por base o Horário de Maior Movimento para calcular os parâmetros do sistema. Para Lima (2011, p. 2):

O planejamento e dimensionamento dos sistemas telefônicos são realizados para que o escoamento do tráfego se realize sem dificuldades, ou seja, que as chamadas solicitadas pelos assinantes tenham alta probabilidade de sucesso inclusive nas horas de maior movimento (HMM). A quantidade de troncos e equipamentos de comutação, necessários para o fluxo do tráfego telefônico são dimensionados em função das estatísticas da hora de maior movimento de um dia, semana, mês ou ano, da temporada de maior tráfego.

Logo, deverão ser utilizados os dados no período de tempo em que mais se concentram as chamadas recebidas (HMM) pelo CAE do CIODES. Conforme explicitado acima, não foi possível coletar os dados da HMM na prática. Logo, será estimado aqui um valor que se aproxime da realidade. Será tomado aqui um fator de utilização ρ de valor mais próximo de 1, devido à grande demanda de serviços em tal horário. Para fins teóricos, utilizaremos $\rho = 0,90$; $\lambda = 0,50$; com 28 operadores no call center (tabela 2).

Com esse valor de ρ e m , temos $\mu = \frac{\lambda}{m \cdot \rho} = 0,0198$.

Sendo assim, a probabilidade de encontrar todos os servidores ociosos é:

$$\mathbf{P_0 = 6,0842 \times 10^{-13} \approx 0\%}$$

Já o número médio de clientes na fila é dado por:

$$\mathbf{L_q \approx 2}$$

O tempo de espera médio na fila é:

$$\mathbf{W_q = 4,5s}$$

Logo, o tempo médio de permanência no sistema é:

$$\mathbf{W = 54 s}$$

CONCLUSÃO

Observa-se então que os números obtidos teoricamente aproximam-se muito da realidade, e que na HMM o tempo de espera teórico W_q de um cliente na fila é de aproximadamente 4,5 segundos, resultado este que difere dos dados coletados na prática.

A divergência desses resultados pode ser atribuída à falta dos dados precisos da HMM do sistema, que são indispensáveis para tal cálculo. No entanto, foi possível observar a formação de fila e o tempo de permanência no sistema, que são relativamente próximos do esperado.

Em outras palavras, o Call Center consegue atender à demanda de ligações atual sem que o solicitante do serviço espere demasiadamente, proporcionando a rápida comunicação entre cliente e atendente.

No mesmo sentido, é observado que a probabilidade de um servidor estar ocioso é praticamente nula tanto na HMM quanto fora desta. Dado o exposto, é altamente recomendável que em um futuro próximo se aumente a quantidade de operadores, com o intuito de não se elevar o tempo de espera, já que a demanda do centro se mostra crescente, acompanhando o crescimento populacional.

Desta feita, fica claro que o modelo M/M/m é adequado ao CIODES que, analisando o sistema como um todo, e não somente em sua HMM, encontra-se com o correto dimensionamento da CAE, ou seja, o número de operadores do sistema foi definido de

forma correta, o que garante um bom rendimento do sistema e evita possíveis desperdícios ou demoras no atendimento.

Além disso, uma estimativa no acréscimo de ligações recebidas traz à tona um estudo que possibilita a inclusão de novas regiões de atendimento ao CIODES, o que traz benefícios, como economia no processo e outras vantagens. De modo análogo, o presente estudo pode ser verificado por diferentes ângulos de visão, como:

- Nova capacidade do sistema de acordo com o acréscimo ou decréscimo de servidores;
- Quantidade de servidores necessários para redução no tempo de atendimento, ou para um tempo máximo de atendimento;
- Possibilidade de aplicação de outras disciplinas de serviço no sistema (FIFO, SIRO,...);

Tendo em vista os aspectos observados, é possível afirmar que estudo em questão deve ser feito de forma contínua, como por exemplo, a cada 5 anos, de forma a garantir que o sistema atenda de forma satisfatória o cidadão que se encontra em solo capixaba.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, Maria Margarida de. **Introdução à metodologia do trabalho científico: elaboração de trabalhos na graduação**. – 7ª ed., 2ª reimp. – São Paulo: Atlas, 2006.

ARENALES, Marcos; ARMENTANO, Vinicius; MORABITO, Reinaldo. **Pesquisa operacional: para cursos de engenharia**. 2007.

DA CONCEIÇÃO, Katiani; LOUREIRO, Fernando Martineli; GONÇALVES, Mirian Buss. Análise da capacidade de atendimento através de uma aproximação exponencial de uma central telefônica operando com agentes com múltiplas habilidades. **XLI SBPO**, 2009.

DAVENPORT, Thomas H. et al. **Conhecimento empresarial**. Elsevier Brasil, 1998.

ESPÍRITO SANTO. Centro Integrado Operacional De Defesa Social. **Metodologia Padronizada de Socorro e Atendimento Emergencial**. Vitória. 2014.

ESPÍRITO SANTO. Secretaria da Segurança Pública e Defesa Social. Centro Integrado Operacional de Defesa Social. **CIODES: CIODES**. Disponível em: <http://www.sesp.es.gov.br/sitesesp/index.jsp#ciodes_principal.jsp>. Acesso em: 27 set. 2015.

FIGUEIREDO, Danielle Durski; ROCHA, Silvana Heidemann. Aplicação da teoria das filas na otimização do número de caixas: um estudo de caso. **Iniciação Científica CESUMAR**, v. 12, n. 2, 2010.

HILLIER, Frederick S.; LIEBERMAN, Gerald J. **Introdução à pesquisa operacional**. McGraw Hill, 2010.

LIMA, Cleber et al. Dimensionamento básico de centrais via simulação de tráfego telefônico. **Communication Technology**, 2011.

MARINS, Fernando Augusto Silva. Introdução à Pesquisa Operacional. **São Paulo: Cultura Acadêmica: Universidade Estadual Paulista**, 2011.

PINHEIRO, Gil. Teoria de Filas e Sistemas de Comunicação. **Apostila de Aula. Departamento de Engenharia Eletrônica e Telecomunicações, Universidade Estadual do Rio de Janeiro–UERJ**, 2004.

SICA, Paola d'Azevedo. **Análise da capacidade de uma central de atendimento de um centro de serviços compartilhados (CSC)**. 2010.

SILVA, Vanina Macowski Durski et al. Teoria das Filas aplicada ao caso: Porto de Itajaí-SC. **SIMPÓSIO DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO DA UNESP**, v. 8, p. 1-9, 2006.

TÔRRES, Oswaldo Fadigas. Elementos da teoria das filas. **RAE-Revista de Administração de Empresas**, v. 6, n. 20, p. 111-127, 1966.

UPE, Francisco José Costa Araújo. **Distribuição da demanda telefônica de um call center através da criação e priorização de filas inteligentes**. 2010.

UPE, Francisco José Costa Araújo. **Modelo para segmentação da demanda de um Call Center em múltiplas prioridades**: Estudo da implantação em um Call Center de Telecomunicações. 2004.

ZEITHAML, Valarie A.; BITNER, Mary Jo; GREMLER, Dwayne D. **Marketing de Serviços-: A Empresa com Foco no Cliente**. McGraw Hill Brasil, 2014.

APLICAÇÕES DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS NA MODELAGEM MATEMÁTICA PARA ENGENHARIA: UMA INTRODUÇÃO À TEORIA DA CAMADA LIMITE

Moacir César da Vitória Júnior²; Natan Sian das Neves¹; Roger da Silva Rodrigues³; Vitor Pancieri Pinheiro⁴

1. Acadêmico do curso de Engenharia Civil da Faculdade Brasileira – MULTIVIX
2. Mestre em Física, docente da Faculdade Brasileira – MULTIVIX.
3. Mestre em Engenharia Mecânica, docente da Faculdade Brasileira – MULTIVIX.
4. Especialista em Docência do Ensino Superior, docente da Faculdade Brasileira – MULTIVIX.

RESUMO

O presente artigo busca demonstrar a importância dos conceitos de equações diferenciais na modelagem matemática voltada ao desenvolvimento da camada limite sobre uma placa plana sólida. O conhecimento das técnicas de equações diferenciais é de suma relevância na formação de profissionais e graduandos de engenharia, pois tais permitem descrever matematicamente e compreender como os fenômenos físicos se comportam na realidade. Nesse contexto, o domínio das equações diferenciais se tornou um objeto elementar e prioritário, pois até equações simples que são resolvidas analiticamente podem ilustrar um problema real, contudo, problemas envolvendo modelagens com equações diferenciais mais complexas já são solucionadas com a utilização dos métodos numéricos.

Palavras-chave: Equações. Diferenciais. Modelagem. Camada. Limite.

ABSTRACT

This article seeks to demonstrate the importance of the concepts of differential equations in the mathematical modeling focused on the development of the boundary layer on a solid flat plate. Knowledge of the techniques of differential equations is of paramount importance in the formation of professional and engineering graduate students, as these allow mathematically describe and understand how physical phenomena behave in reality. In this context, the field of differential equations became an elementary and primary object, because even simple equations which are solved can analytically illustrate a real problem, however, problems involving modeling more complex differential equations are already solved with the use of numerical methods.

Keywords: Equations. Differential. Modeling. Boundary Layer.

INTRODUÇÃO

A engenharia contempla uma vasta área de aplicações de fenômenos físicos presente na natureza, em especial a engenharia mecânica possui conceitos e modelagens matemáticas bem aprimoradas, o que permite ampliar tais fundamentos em diversas áreas da engenharia. Dentre elas, a área de termo-fluidos é um horizonte de grande relevância científica e prática para engenharia.

A mecânica dos fluidos é um dos pilares da termo-fluidos, esse ramo estuda as propriedades e o comportamento dos fluidos, essa área é extremamente encantadora e deslumbrante devido a sua matemática refinada e um amplo conjunto de aplicações práticas, como na hidráulica, sistemas de ventilação e ar condicionado, aerodinâmica, automobilismo e ainda na medicina.

Essa diversidade de aplicações da mecânica dos fluidos não foi fácil de ser atingida, pois a grande complexidade de trabalhar com fluidos e a falta de tecnologia atrasaram esses fundamentos. Porém, no ano de 1904, um dos maiores cientistas e atualmente conhecido como pai da mecânica dos fluidos moderna, Ludwig Prandtl trouxe uma nova perspectiva

que mudou radicalmente o pensamento em referência aos problemas relacionados a fluidos. Prandtl propôs separar um escoamento em duas regiões: uma região na qual a viscosidade é nula, cuja equação clássica de Euler é válida e uma região estreita próxima à superfície em que os efeitos viscosos devem ser considerados nessa região denotada como camada limite (FREIRE, 2002) (CANEDO, 2000).

Nesse contexto, as equações diferenciais surgem como um elo para ligar os fenômenos físicos com a modelagem matemática, pois na maioria dos problemas de engenharia as equações de governo são descritas por equações diferenciais. Com isso, fica evidente que um estudo mais rico e conceitual sobre os fundamentos de equações diferenciais proporciona um efeito gigantesco na formação dos engenheiros contemporâneos, sendo aptos a resolver e lidar com diversas circunstâncias práticas no cotidiano.

TÉCNICAS ELEMENTARES DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

As equações diferenciais possuem uma aplicabilidade gigantesca em um leque de problemas bem significantes na engenharia, como por exemplo, escoamentos de fluidos, a teoria da viga elástica, condução de calor, hidráulica dos solos, sistemas de vibrações mecânicas e flambagem de colunas. Dependendo de como for analisado tais problemas é possível resolver analiticamente, contudo, os problemas próximos da realidade possuem equações diferenciais com um nível de complexidade elevado. Então surge a grande importância de classificar as equações diferenciais, afim de entender quais tipos de equações diferenciais retratam os fenômenos físicos, buscando a partir disso, métodos, técnicas e conceitos para resolver tal equação (BOYCE; DIPRIMA, 2013) (ZILL; CULEN, 2001).

CLASSIFICAÇÃO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

As inúmeras equações diferenciais que estão presentes nas mais diversas modelagens matemáticas dos fenômenos físicos podem em modo geral receber algumas classificações, como, por exemplo, em relação ao tipo, ordem, linearidade e homogeneidade (Figura 1).

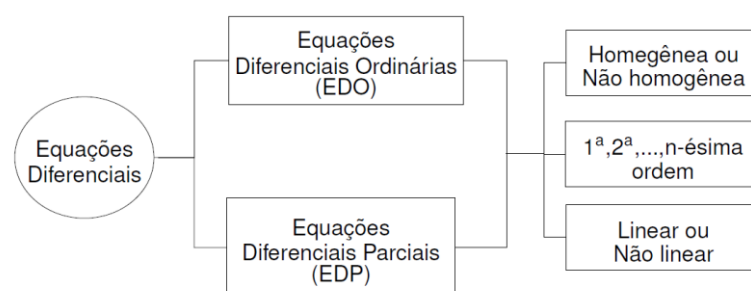


Figura 1: Classificação geral das equações diferenciais.
Fonte: Elaborado pelo autor

Sem dúvida quando se analisa uma equação diferencial, uma das mais importantes classificações é referente a sua natureza, isto é, definir se uma equação diferencial é uma EDO, depende de um único parâmetro, por exemplo, a equação 1 esboça a equação da curva elástica para deflexão de vigas.

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{q}{EI} \quad (1)$$

Por outro lado, as equações diferenciais que variam ao longo de dois ou mais parâmetros são denominadas como EDP, por exemplo, a equação 2 apresenta a equação básica do fluxo bidimensional para movimento de água nos solos.

$$k_x \frac{d^4 h}{dx^4} + k_z \frac{d^4 h}{dz^4} = 0 \quad (2)$$

Então, é muito importante conseguir distinguir qual tipo de equação diferencial o problema está submetido, pois é comum não conseguir escrever a solução exata, na qual as técnicas elementares para a solução de uma equação diferencial não resolvem o problema. Um cenário muito comum que ocorre tais eventos são os casos envolvendo fluidos, por terem a equação de Navier-Stokes, que é uma equação diferencial parcial de não linearidade e com muitos termos que podem afetar significativamente os resultados finais.

Com isso vem a necessidade de encontrar formas para resolver tais tipos de equações, como o uso de hipóteses simplificadoras, que acarreta em um modelo mais simples de solução, análise de ordem de grandeza, ou seja, quando se despreza alguns termos comparando com parâmetros e, principalmente, a utilização dos métodos numéricos computacionais.

FILOSOFIA DOS MÉTODOS NUMÉRICOS

Os métodos numéricos são uma ferramenta de extrema relevância na solução de problemas encontrados na engenharia, física, matemática, química e diversas áreas da ciência. São métodos que fornecem resultados aproximados, porém muito eficientes para a solução de diversos tipos de equações matemáticas que governam os problemas físicos. Nesse contexto existem vários métodos numéricos que foram desenvolvidos ao longo do tempo com o objetivo de aproximar soluções, por exemplo, métodos das diferenças finitas, volumes finitos, elementos finitos, Newton-Raphson, Runge-kutta, Euler, regra de Simpson e entre vários outros métodos e técnicas. Ressaltando que a escolha do método correto pode diminuir significativamente algum erro nos resultados finais do problema.

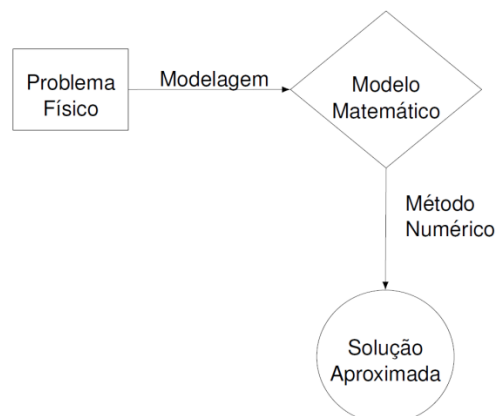


Figura 2: Filosofia geral de aplicação dos métodos numéricos
Fonte: Adaptado de Carvalho e Maia (1987, p. 01)

Nesse âmbito, os métodos numéricos em geral possuem uma filosofia de aplicação semelhante entre si (Figura 2). Muitos problemas e circunstâncias que ocorrer na natureza são representados por equações diferenciais (podendo ser parciais ou ordinárias), esse processo de modelar o problema físico (utilizando hipóteses simplificadoras) já é a primeira aproximação de engenharia. Logo, em alguns casos é possível resolver as equações

diferenciais que modelam os fenômenos de forma analítica, porém em certas ocasiões as equações são complexas e os métodos numéricos são o caminho mais fácil, gerando assim a segunda aproximação do problema. Um dos métodos mais conhecidos e famosos que resolver equações diferenciais é o método de Runge-Kutta, ele oferece um percentual de erro bem insignificante (KREYSZIG, 2009)(GILAT; SUBRAMANIAM, 2009).

MÉTODO DE RUNGE-KUTTA

As equações diferenciais ordinárias ou simplesmente EDO, frequentemente, descrevem fenômenos da natureza. Existem várias formas e técnicas para obter uma solução de uma EDO, o método de Runge-Kutta é um bom caminho. Esse método pode ser aplicado quando temos uma equação diferencial com o seguinte formato:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (3)$$

Deixando claro que o método de Runge-Kutta não se restringe à resolução de uma EDO de 1º ordem. Para resolver uma EDO de ordem mais alta pelo método, basta fazer uma mudança de variável. Logo, as equações em geral podem ser solucionadas utilizando a expressão determinada por Carl Runge e Martin Wilhelm Kutta em meados de 1900 (VALLE, 2012).

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (4)$$

Em que k_1, k_2, k_3 e k_4 são constantes já definidas como:

$$k_1 = hf(x_n, y_n) \quad (5a)$$

$$k_2 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}k_1\right) \quad (5b)$$

$$k_3 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}k_2\right) \quad (5c)$$

$$k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3) \quad (5d)$$

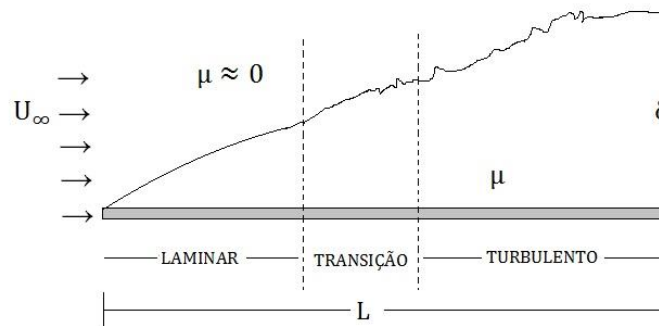
Esse método é relativamente “fácil” de ser aplicado na solução das equações ordinárias, ou seja, tal método nada mais é do que um sistema de interação termo a termo. Em muitas circunstâncias não é muito agradável buscar tentar resolver uma equação diferencial analiticamente, e sim a utilização de um algoritmo computacional que fornecerá valores aproximados do problema. Todavia, é muito importante compreender como funciona cada etapa do método antes de aplicá-lo a uma rotina de programação (CARVALHO; MAIA, 1987).

MODELAGEM MATEMÁTICA

A teoria da camada limite é umas das ideias mais extraordinárias e importantes da mecânica dos fluidos, desenvolvida por Ludwig Prandtl em 1904, tal ideia é uma ponte entre escoamentos sem viscosidade, na qual a equação de Euler é válida, porém não representam de forma adequada os problemas de engenharia envolvendo fluido e escoamentos viscosos que são representados pela equação de Navier-Stokes. A teoria da camada limite afirma que é possível analisar o escoamento em torno de um corpo em duas regiões. Isto é, o escoamento próximo à superfície do corpo seria considerado os efeitos

viscosos, e fora dessa região os efeitos viscosos seriam desprezíveis. Essa região que separa o tipo de escoamento foi denominada camada limite (Figura 3), que é uma região de pequena espessura, próxima a superfície do corpo, com gradiente de velocidade grande e as forças viscosas sendo relevante nas análises (FOX; MCDONALD; PRITCHARD, 2006) (ÇENGEL; CIMBALA, 2007) (FREIRE, 2002).

Figura 3: Desenvolvimento da camada limite.



Fonte: Elaborado pelo autor

A partir da equação que rege a mecânica dos fluidos, ou seja, equação de Navier-Stokes, Prandtl realizou uma análise de ordem de grandeza (ou magnitude), e obteve as equações da camada limite. Ou seja, uma análise de ordem de grandeza trás em sua essência uma comparação entre grandezas e assim é possível em alguns casos desprezas certas propriedades que não possuem tanta influência nas análises.

O adimensional número de Reynolds é um termo que relaciona as forças inerciais e viscosas num escoamento e é de grande relevância para diversos tipos de escoamento, pois permite fazer uma análise prévia e rápida sobre o escoamento estudado. Para um escoamento externo sobre uma placa plana, podemos escrever que:

$$Re = \frac{\rho U_\infty L}{\mu} \quad (6)$$

Onde ρ e μ são respectivamente a massa específica e a viscosidade do fluido, U_∞ e L são a velocidade da corrente livre (fora da camada limite) e o comprimento característico da placa. Dentro desse amplo conjunto de problemas da mecânica dos fluidos, é necessário usar algumas restrições na modelagem, a fim de simplificar a equação de Navier-Stokes, então considere as seguintes hipóteses simplificadoras:

- I. Fluido Newtoniano: Tensão de cisalhamento proporcional à taxa de deformação.
- II. Massa específica (ρ) e viscosidade (μ) são constantes.
- III. Escoamento em regime laminar.
- IV. Escoamento em regime permanente.
- V. Escoamento bidimensional.
- VI. A ordem de magnitude da espessura é muito menor que o comprimento da placa ($\delta \ll L$).

Para realizarmos as análises de ordem de grandeza (ou magnitude), vamos determinar cada ordem de grandeza de cada termo das equações (Tabela 1).

Tabela 1: Ordem de grandeza dos termos

Termos da Equação	Ordem de Grandeza
\mathbf{u}	$[\mathbf{U}_\infty]$
V	$[V_\infty]$
\mathbf{x}	$[\mathbf{L}]$
\mathbf{y}	$[\delta]$
ρ	$[\rho]$
μ	$[\mu]$

Fonte: Elaborado pelo autor

Da equação da continuidade, podemos obter as primeiras relações em termos de ordem de grandeza para auxiliar na demonstração das equações da camada limite. Tendo em mente, estamos considerando ρ sendo constante. A equação da continuidade na forma vetorial fica:

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (7)$$

Em coordenadas cartesianas:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (8)$$

Como o escoamento é bidimensional, a componente de velocidade w será considerada nula.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (9)$$

Fazendo uma análise de ordem de magnitude (ou grandeza) para cada termo da equação 9, temos que:

$$\left[\frac{U_\infty}{L} \right] + \left[\frac{V_\infty}{\delta} \right] = 0 \quad (10)$$

$$[V_\infty] = \left[U_\infty \frac{\delta}{L} \right] \quad (11)$$

Como a espessura (δ) é muito menor que o comprimento (L) da placa, tem que V_∞ é bem menor que U_∞ . Logo, isto acarretará que $v \ll u$. Para apresentar as equações da camada limite, trabalharemos com a equação que governa grande parte dos fenômenos da mecânica dos fluidos, a equação de Navier-Stokes ou equação da quantidade de movimento.

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V}(\nabla \cdot \vec{V}) \right) = -\vec{\nabla}P + \rho \vec{g} + \mu(\nabla^2 \vec{V}) \quad (12)$$

O formato mais conhecido da equação de Navier-Stokes e quando se expressa em coordenadas cartesianas, obtendo-se o conjunto de três equações 13a, 13b e 13c;

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \rho g_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (13a)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \rho g_y - \frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (13b)$$

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \rho g_z - \frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (13c)$$

Analisando a equação de Navier-Stokes na direção x:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \rho g_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (14)$$

Atribuindo as hipóteses simplificadoras e lembrando que a gravidade atua somente na vertical, o termo ρg_x será nulo, então ficamos com a seguinte equação:

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (15)$$

Inicialmente, a ordem de grandeza do gradiente de pressão em x não será analisada. A ordem de grandeza de cada termo da equação (15) fica expressa como:

$$\left[\rho U_\infty \frac{U_\infty}{L} \right] + \left[\rho V_\infty \frac{U_\infty}{\delta} \right] = \left[\mu \frac{U_\infty}{L^2} \right] + \left[\mu \frac{U_\infty}{\delta^2} \right] \quad (16)$$

Pela equação da continuidade, obtivemos o termo V_∞ , substituindo na equação (16).

$$\left[\rho U_\infty \frac{U_\infty}{L} \right] + \left[\rho U_\infty \left(\frac{\delta}{L} \right) \frac{U_\infty}{\delta} \right] = \left[\mu \frac{U_\infty}{L^2} \right] + \left[\mu \frac{U_\infty}{\delta^2} \right] \quad (17)$$

Observando a equação acima e recordando que existe uma relação entre a espessura δ da camada limite e o comprimento da placa L , ou seja, nas hipóteses simplificadoras foi proposto que $\delta \ll L$. Então, seguindo esta ideia é razoável dizer que:

$$\left[\mu \frac{U_\infty}{L^2} \right] \ll \left[\mu \frac{U_\infty}{\delta^2} \right] \quad (18)$$

Portanto, com base na expressão 18, podemos desprezar a derivada de ordem segunda em relação a x.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (19)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \approx 0 \quad (20)$$

Desse modo, a equação de Navier-Stokes na direção x vai se reduzir a seguinte equação:

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (21)$$

Dividindo a equação 21 pela massa específica ρ , obteremos umas das equações da camada limite. Em que $\vartheta = \mu/\rho$ é a viscosidade cinemática do fluido.

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \vartheta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (22)$$

Analisando os termos convectivos e viscosos da equação 22 em relação a sua ordem de grandeza, podemos considerar que a ordem de grandeza dos termos é aproximadamente:

$$\left[\rho U_\infty \frac{U_\infty}{L} \right] \approx \left[\mu \frac{U_\infty}{\delta^2} \right] \quad (23)$$

Generalizando o comprimento (L) da placa, por um comprimento quaisquer (x). Podemos definir que a espessura da camada limite está intimamente ligada com o número de Reynolds e o comprimento da placa.

$$\delta \approx \sqrt{\frac{\mu x}{\rho U_\infty}} \Rightarrow \frac{\delta}{x} \approx \frac{1}{\sqrt{Re}} \quad (24)$$

Estudando cada termo da equação de Navier-Stokes na direção y .

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \rho g_y - \frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (25)$$

Aplicando as hipóteses simplificadoras na equação de Navier-Stokes. Tendo em mente que as força de campo ρg_y não é desprezível em relação à y , pois a gravidade atua na vertical.

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \rho g_y - \frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (26)$$

Desconsiderando inicialmente o gradiente de pressão e as forças de campo na análise de ordem de magnitude.

$$\left[\rho U_\infty \frac{V_\infty}{L} \right] + \left[\rho V_\infty \frac{V_\infty}{\delta} \right] = \left[\mu \frac{V_\infty}{L^2} \right] + \left[\mu \frac{V_\infty}{\delta^2} \right] \quad (27)$$

Aplicando a relação obtida na equação da continuidade (V_∞) na equação 27, tem-se que:

$$\left[\rho U_\infty \left(\frac{U_\infty \delta}{L} \right) \frac{1}{L} \right] + \left[\rho \left(\frac{U_\infty \delta}{L} \right) \left(\frac{U_\infty \delta}{L} \right) \frac{1}{\delta} \right] = \left[\mu \left(\frac{U_\infty \delta}{L} \right) \frac{1}{L^2} \right] + \left[\mu \left(\frac{U_\infty \delta}{L} \right) \frac{1}{\delta^2} \right] \quad (28)$$

$$\left[\rho U_\infty \frac{U_\infty \delta}{L L} \right] + \left[\rho U_\infty \frac{\delta U_\infty \delta}{L \delta} \right] = \left[\mu \frac{U_\infty \delta}{L^2 L} \right] + \left[\mu \frac{U_\infty \delta}{\delta^2 L} \right] \quad (29)$$

Analisando cada termo da equação 29, concluímos que a derivada de ordem segunda em relação a x pode ser desconsiderada, pois $\delta \ll L$.

$$\left[\mu \frac{U_\infty \delta}{L^2 L} \right] \ll \left[\mu \frac{U_\infty \delta}{\delta^2 L} \right] \quad (30)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (31)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \approx 0 \quad (32)$$

É extrema importância nesse momento fazer comparação global das análises realizando a equação de Navier-Stokes na direção x e y . Note que, o estudo de ordem de magnitude dos termos convectivos e viscosos de ambas as equações possuem uma relação bem próxima entre si, ou seja, comparando a equação 17 com a equação 29 respectivamente.

$$\left[\rho U_\infty \frac{U_\infty}{L} \right] + \left[\rho U_\infty \frac{\delta U_\infty}{L \delta} \right] = \left[\mu \frac{U_\infty}{L^2} \right] + \left[\mu \frac{U_\infty}{\delta^2} \right] \quad (33)$$

Reorganizando os termos da equação 33.

$$\left[\rho U_\infty \frac{U_\infty}{L} \left(\frac{\delta}{L} \right) \right] + \left[\rho U_\infty \frac{\delta U_\infty}{L \delta} \left(\frac{\delta}{L} \right) \right] = \left[\mu \frac{U_\infty}{L^2} \left(\frac{\delta}{L} \right) \right] + \left[\mu \frac{U_\infty}{\delta^2} \left(\frac{\delta}{L} \right) \right] \quad (34)$$

Podemos verificar um elo entre as duas equações acima, daí escreve que:

$$\text{Equação 34} \approx \frac{\delta}{L} \text{Equação 33} \quad (35)$$

Ordem de grandeza das variáveis na direção y são menores que as variáveis na direção x , pois $\delta \ll L$. Logo, os termos convectivos e viscosos da equação y , podem ser desconsiderados.

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \rho g - \frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (36)$$

Então atribuímos que $v \ll u$, acarretará que a equação de Navier-Stokes na direção y se reduzirá a seguinte expressão.

$$\rho g - \frac{\partial P}{\partial y} \approx 0 \quad (37)$$

Como a pressão está dependendo de uma coordenada somente, podemos remover a derivada parcial e atribuir uma derivada total. E frisando que o termo ρg fica com o sinal invertido, devido à coluna de fluido.

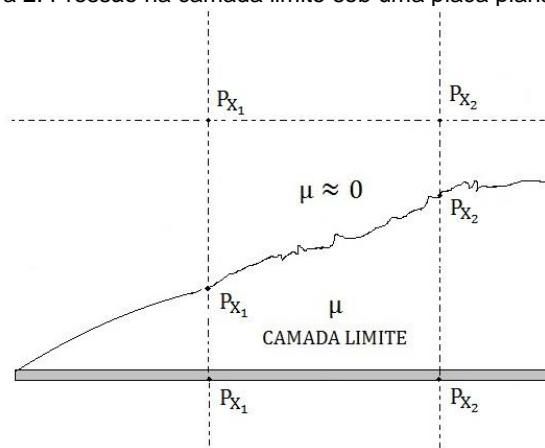
$$\frac{dP}{dy} = -\rho g \quad (38)$$

Separando as variáveis semelhantes e integrando ambos os lados da equação 38, obtém-se que:

$$P = -\rho g y + C \quad (39)$$

Essa consideração é muito conveniente, pois temos que o valor máximo de y é a espessura da camada limite δ . Como a espessura da camada limite é pequena, temos que a coluna de fluido na camada limite pode ser desconsiderada.

Figura 2: Pressão na camada limite sob uma placa plana sólida



Fonte: Elaborado pelo autor

Por isso, chegamos à conclusão que a pressão não variará em y . Logo, o gradiente de pressão vertical é desprezível na equação da quantidade de movimento.

$$\frac{\partial P}{\partial y} \approx 0 \quad (40)$$

Em outras palavras, dentro e fora da camada limite a pressão será a mesma (Figura 2), logo, a pressão só variará na direção x . Isso é cômodo para as análises, porque dentro e fora da camada limite a pressão em relação a y é aproximadamente a mesma. Assim é possível determinar qualquer valor da pressão em x .

$$\frac{\partial P}{\partial x} \Big|_{\substack{\text{DENTRO DA} \\ \text{CAMADA LIMITE} \\ \mu \neq 0}} \approx \frac{\partial P}{\partial x} \Big|_{\substack{\text{FORA DA} \\ \text{CAMADA LIMITE} \\ \mu \approx 0}} \quad (41)$$

Como a pressão dentro e fora da camada limite é a mesma, podemos analisar a pressão fora da camada limite, na qual a viscosidade (μ) é aproximadamente nula. Imediatamente, fora da camada limite é possível utilizar a equação de Bernoulli.

$$P + \rho gy + \frac{\rho u^2}{2} = \text{cte} \quad (42)$$

Aplicando a equação 42 entre os pontos x_1 e x_2 . Como o referencial em y não varia temos que $y_1 = y_2 = y$. Os termos gravitacionais da equação de Bernoulli se anularão, então podemos escrever que:

$$P_{x_1} + \frac{\rho(u_{x_1})^2}{2} = P_{x_2} + \frac{\rho(u_{x_2})^2}{2} \quad (43)$$

Dividindo a equação 43 pela massa específica ρ .

$$\frac{P_{x_1}}{\rho} - \frac{P_{x_2}}{\rho} = \frac{(u_{x_2})^2}{2} - \frac{(u_{x_1})^2}{2} \quad (44)$$

Admitindo que x_1 e x_2 sejam tão próximos que se possa escrever que $x_2 = x_1 + \Delta x$.

$$\frac{P_{x_1} - P_{x_1 + \Delta x}}{\rho} = \frac{(u_{x_1 + \Delta x})^2 - (u_{x_1})^2}{2} \quad (45)$$

Dividindo por Δx a equação 45, e tomando o limite quando $\Delta x \rightarrow 0$, temos que:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P_{x_1 + \Delta x} - P_{x_1}}{-\rho \Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(u_{x_1 + \Delta x})^2 - (u_{x_1})^2}{2 \Delta x} \quad (46)$$

Desse modo, chegamos a seguinte expressão:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial (u_x)^2}{\partial x} \quad (47)$$

Utilizando os conceitos primários de cálculo, sabe-se que:

$$\frac{\partial (u_x)^2}{\partial x} = 2u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad (48)$$

Substituindo a equação 48 em 47, temos a seguinte relação matemática.

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad (49)$$

Se atribuirmos $y = \delta$ e $u_x = U_\infty$. E lembrando que a velocidade da corrente livre é constante, a derivada será nula.

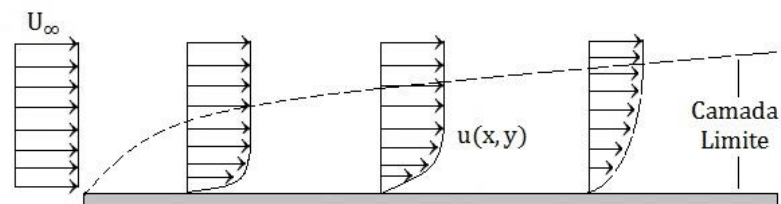
$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = U_{\infty} \frac{\partial U_{\infty}}{\partial x} = 0 \quad (50)$$

Portanto, aplicando o resultado obtido na equação 50 em 22, pode-se concluir que a equação da quantidade de movimento ou Navier-Stokes na direção x fica expressada por:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (51)$$

A equação 51 e a equação da continuidade serão utilizadas para descrever o perfil de velocidade na camada limite sobre uma placa plana. Veja que mesmo considerando algumas hipóteses para simplificar a equação de Navier-Stokes, ainda encontramos uma grande dificuldade para resolvê-la. A solução para esse problema foi determinada em 1908, pelo engenheiro alemão chamado Paul Richard Heinrich Blasius, que foi um dos primeiros alunos de Prandtl. Tal buscou solucionar as equações da camada limite formada ao longo de uma placa plana, reduzindo a equação 51 que é parcial, em uma equação ordinária não linear. Para isso, utilizou os conceitos de função corrente e mudanças de variáveis (BRANDÃO, 1991) (PITTS; SISSON, 1981).

Figura 3: Perfil de velocidade ao longo da placa



Fonte: Elaborado pelo autor

De acordo com a hipótese de similaridade de Blasius, tal reconhece que o perfil de velocidades está estabilizado ao longo da placa, ou seja, como a placa é infinitamente longa, o perfil é o mesmo em qualquer coordenada x (Figura 3), introduzindo a variável de similaridade η (ÇENGEL; CIMBALA, 2007).

$$\frac{u}{U_{\infty}} = \phi(\eta) \quad (52)$$

A equação 52 possui um termo adimensional que envolve a velocidade dentro da camada limite (u) e a velocidade da corrente livre (U_{∞}). E o termo η é dado como:

$$\eta \approx \frac{y}{\delta} \quad (53)$$

Então, a equação 24 pode ser reescrita como sendo:

$$\delta \approx \frac{x}{\sqrt{Re}} = \sqrt{\frac{\nu x}{U_{\infty}}} \quad (54)$$

Desse modo, podemos determinar uma relação entre a variável de similaridade η adimensional com as variáveis x e y .

$$\eta = \frac{y}{x^{1/2}} \sqrt{\frac{U_{\infty}}{\nu}} \quad (55)$$

Utilizou a função corrente (ψ) em relação à componente u .

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (56)$$

E para a componente v , a função corrente é expressa por:

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (57)$$

Escrevendo a equação da continuidade em termos de função corrente, obtemos que:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (58)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad (59)$$

Note que a equação da continuidade fica totalmente satisfeita em termos da função corrente. Então, escrevendo a equação 51 em termos de função corrente.

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \vartheta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (60)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = \vartheta \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (61)$$

Logo, a equação 62 é uma equação diferencial parcial (EDP) de terceira ordem.

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \vartheta \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \quad (62)$$

A solução da equação 62 vem do método de combinações de variáveis, ou seja, esse método funciona quando o problema em questão permite que associassem x e y em uma só variável adimensional, ou seja, para a camada limite em placa plana temos o termo η determinado na equação 55. Assim, podemos transformar uma equação diferencial parcial (EDP) em uma equação diferencial ordinária (EDO). Então, adimensionalizando a função corrente.

$$f = \frac{\psi}{\vartheta \sqrt{\text{Re}}} \quad (63)$$

Fazendo uma análise dimensional dos termos da equação 62. Tendo em vista que o número de Reynolds é adimensional. Logo ψ e ϑ terão que ter a mesma unidade, para que a termo f seja adimensional. Da equação da função corrente para a componente u , temos que:

$$\partial \psi = u \partial y = [\Psi] = \left[\frac{m}{s} \right] [m] = \left[\frac{m^2}{s} \right] \quad (64)$$

A lei da viscosidade de Newton, nos fornecerá a unidade da viscosidade do fluido.

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} = [\text{Pa}] = [\mu] \left[\frac{m}{s} \right] \left[\frac{1}{m} \right] = [\mu] = \left[\frac{\text{kg}}{\text{ms}} \right] \quad (65)$$

Como a viscosidade cinemática do fluido é a fração da viscosidade pela massa específica.

$$\vartheta = \frac{\mu}{\rho} = [\vartheta] = \left[\frac{\text{kg}}{\text{ms}} \right] \left[\frac{\text{m}^3}{\text{kg}} \right] = \left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}} \right] \quad (66)$$

Com essas relações conclui-se que f é adimensional. Usando as técnicas do cálculo, iremos determinar as componentes de velocidade u e v em função das variáveis adimensionais f e η . Para buscar um elo entre tais os, partiremos da seguinte expressão:

$$\eta = \frac{y}{x^{1/2}} \sqrt{\frac{U_\infty}{\vartheta}} \quad (67)$$

Determinado $\partial\eta/\partial x$ e $\partial\eta/\partial y$, teremos que:

$$\frac{\partial\eta}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{x^{1/2}} \sqrt{\frac{U_\infty}{\vartheta}} \right) \quad (68)$$

Para a derivada em relação à y , temos que x , U_∞ e ϑ serão constantes.

$$\frac{\partial\eta}{\partial y} = \frac{1}{x^{1/2}} \sqrt{\frac{U_\infty}{\vartheta}} \frac{\partial}{\partial y} (y) \quad (68)$$

Portanto, derivada de η em relação a y é dado por:

$$\frac{\partial\eta}{\partial y} = \sqrt{\frac{U_\infty}{\vartheta x}} \quad (69)$$

Analogamente, para derivada em relação a x , teremos que y , U_∞ e ϑ serão constantes.

$$\frac{\partial\eta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{x^{1/2}} \sqrt{\frac{U_\infty}{\vartheta}} \right) = y \sqrt{\frac{U_\infty}{\vartheta}} \frac{\partial}{\partial x} (x^{-1/2}) \quad (70)$$

Com isso, derivada de η em relação a x é pela equação 71.

$$\frac{\partial\eta}{\partial x} = -\frac{y}{2x} \sqrt{\frac{U_\infty}{\vartheta x}} \quad (71)$$

Porém podemos simplificar a equação acima, substituindo a equação 67 na expressão 71.

$$\frac{\partial\eta}{\partial x} = -\frac{1}{2} \eta \frac{1}{x} \quad (72)$$

Desse modo, executando o mesmo procedimento para a equação 63. Frisando que o termo f depende tanto de x e y .

$$\psi = f\vartheta\sqrt{Re} = f\vartheta\sqrt{\frac{U_\infty x}{\vartheta}} \quad (73)$$

Realizando algumas manipulações algébricas para determinar $\partial\psi/\partial y$. Sabendo que ϑ , U_∞ e x são constantes.

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} \vartheta \sqrt{\frac{U_\infty x}{\vartheta}} \quad (74)$$

Seguindo o mesmo raciocínio anterior, é possível determinar a derivada parcial $\partial\psi/\partial x$. Considerado nesse caso que ϑ e U_∞ são constantes.

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \vartheta \sqrt{\frac{U_\infty}{\vartheta}} \frac{\partial}{\partial x} (f x^{1/2}) \quad (75)$$

Aplicando uma regra do cálculo diferencial para determinar a derivada entre x e f , ou seja, utilizando da regra do produto.

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \vartheta \sqrt{\frac{U_{\infty}}{\vartheta}} \left(\frac{f}{2\sqrt{x}} + \frac{\partial f}{\partial x} \sqrt{x} \right) \quad (76)$$

Com as relações matemáticas vista até o momento, podemos propor algumas relações com as componentes de velocidade u e y . Então, aplicando a equação 74 na relação da componente de velocidade u em termos de função corrente ψ , obtêm-se que:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} \vartheta \sqrt{\frac{U_{\infty} x}{\vartheta}} \quad (77)$$

Multiplicando o numerador e denominador por $\partial \eta$, e substituindo a relação 69.

$$u = \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \vartheta \sqrt{\frac{U_{\infty} x}{\vartheta}} = \frac{\partial f}{\partial \eta} \vartheta \sqrt{\frac{U_{\infty}}{\vartheta x}} \sqrt{\frac{U_{\infty} x}{\vartheta}} \quad (78)$$

Então, a componente u da velocidade em termos do adimensional f e o termo η , é dada pela equação 79.

$$u = U_{\infty} \frac{\partial f}{\partial \eta} \quad (79)$$

De forma bem similar, aplicando a equação 74 na relação da componente de velocidade v em termos de função corrente ψ .

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\vartheta \sqrt{\frac{U_{\infty}}{\vartheta}} \left(\frac{f}{2\sqrt{x}} + \frac{\partial f}{\partial x} \sqrt{x} \right) \quad (80)$$

Multiplicando o numerador e denominador por $\partial \eta$, e substituindo a relação 72.

$$v = -\vartheta \sqrt{\frac{U_{\infty}}{\vartheta}} \left(\frac{f}{2\sqrt{x}} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \sqrt{x} \right) = -\vartheta \sqrt{\frac{U_{\infty}}{\vartheta}} \left[\frac{f}{2\sqrt{x}} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \left(-\frac{1}{2} \eta \frac{1}{x} \right) \sqrt{x} \right] \quad (81)$$

Fazendo as devidas simplificações na equação acima, chega-se na relação para a componente de velocidade v em termos de f e η .

$$v = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\vartheta U_{\infty}}{x}} \left(\eta \frac{\partial f}{\partial \eta} - f \right) \quad (82)$$

Para escrever a equação da quantidade de movimento em relação a f e η , basta realizar as derivadas da componente u , cuja equação é expressa abaixo:

$$u = U_{\infty} \frac{\partial f}{\partial \eta} \quad (83)$$

A derivada em relação a x é dada por:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = U_{\infty} \frac{\partial f}{\partial \eta} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) = U_{\infty} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \quad (84)$$

Aplicando a equação 72, chega-se a seguinte expressão.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{U_{\infty}}{2x} \eta \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \quad (85)$$

A derivada em relação a y segue a mesma lógica, tendo atenção a respeito da aplicação da equação 69.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = U_{\infty} \sqrt{\frac{U_{\infty}}{\theta x}} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \quad (86)$$

Pela equação 86, é fácil de encontrar a derivada segunda em relação a y .

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(U_{\infty} \sqrt{\frac{U_{\infty}}{\theta x}} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) \quad (87)$$

Manipulando e substituindo adequadamente a equação 69, teremos que:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = U_{\infty} \sqrt{\frac{U_{\infty}}{\theta x}} \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} \left(\sqrt{\frac{U_{\infty}}{\theta x}} \right) \quad (88)$$

Portanto, a derivada segunda da componente u em relação a y é expressa pela seguinte relação matemática.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{U_{\infty}^2}{\theta x} \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} \quad (89)$$

Por fim, substituindo as equações 79, 82, 85, 86 e 88 na equação 60. Como as variáveis estão dependendo somente de uma variável, podemos atribuir uma derivada total e assim obter a seguinte equação ordinária não linear.

$$2 \frac{d^3 f}{d\eta^3} + f \frac{d^2 f}{d\eta^2} = 0 \quad (90)$$

A equação 90 ficou conhecida como a equação de Blasius. Tal pode ser resolvida utilizando métodos numéricos, como por exemplo, método de Runge-Kutta.

MODELAGEM MATEMÁTICA

A equação de Blasius para camada limite ao longo de uma placa plana sólida é uma equação diferencial ordinária de terceira ordem, cuja solução é dada pelo método de Runge-Kutta. Definindo as variáveis auxiliares, tem-se que:

$$\frac{df}{d\eta} = z \quad (91a)$$

$$\frac{d^2 f}{d\eta^2} = z' = w \quad (92b)$$

$$\frac{d^3 f}{d\eta^3} = z'' = w' \quad (93c)$$

Reescrevendo a equação do problema de Blasius:

$$2 \frac{dw}{d\eta} + fw = 0 \quad (92)$$

Então podemos substituir uma equação diferencial ordinária de 3ª ordem por um conjunto de três equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem.

$$\frac{df}{d\eta} = z \quad (93a)$$

$$\frac{dy}{d\eta} = w \quad (93b)$$

$$\frac{dw}{d\eta} = -\frac{1}{2}fw \quad (93c)$$

As condições de contorno conhecidas para o problema são apresentadas pelas equações 94a e 94b.

$$\eta = 0 \Rightarrow f = z = 0 \quad (94a)$$

$$\eta \rightarrow \infty \Rightarrow z \rightarrow 0 \quad (94a)$$

Para determinar a outra condição necessária para a solução, aplica-se o método de inspeção de raiz, denominada método de Newton-Raphson. Assim, obtém-se a seguinte condição:

$$w(0) \Rightarrow z(\infty) = 1 \quad (95)$$

Portanto, a solução do problema da camada limite hidrodinâmica ao longo de uma placa paralela pode ser visualizada na tabela 2.

Tabela 2: Resultados numéricos do problema da camada Limite ao redor de uma placa plana

$\eta = y\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}}$	f	$f' = \frac{u}{U_\infty}$	f''
0.000	0.000	0.000	0.332
0.500	0.042	0.166	0.331
1.000	0.166	0.330	0.323
1.500	0.370	0.487	0.303
2.000	0.650	0.630	0.267
2.500	0.996	0.751	0.217
3.000	1.397	0.846	0.161
3.500	1.837	0.913	0.108
4.000	2.305	0.955	0.064
4.500	2.790	0.979	0.034
5.000	3.283	0.991	0.016
5.500	3.780	0.997	0.007
6.000	4.279	0.999	0.002
6.500	4.779	1.000	0.001
7.000	5.279	1.000	0.000
7.500	5.778	1.000	0.000
8.000	6.278	1.000	0.000
8.500	6.778	1.000	0.000
9.000	7.278	1.000	0.000
9.500	7.778	1.000	0.000
10.000	8.278	1.000	0.000

Fonte: Elaborado pelo autor

Com base nos resultados numéricos obtidos pelo método de Runge-Kutta, é possível esboçar algumas grandezas físicas de interesse. Determinando $f' = u / U_\infty = 0,990$ a variável de similaridade deve assumir aproximadamente $\eta \cong 4,90$, então fazendo $y = \delta$ e

substituindo tais parâmetros na equação 55, podemos escrever que a espessura da camada limite é dada pela seguinte expressão:

$$\frac{\delta}{x} = \frac{4,90}{\sqrt{Re}} \quad (96)$$

Analogamente, outra grandeza de importância é a tensão de cisalhamento na parede τ_w . Quando $y = 0$ e $\eta = 0$ teremos que $f'' = 0,332$, substituindo tais parâmetros na equação 86 e aplicando na lei de viscosidade de Newton, chega-se ao seguinte resultado.

$$\tau_w = \rho U_\infty^2 \frac{0,332}{\sqrt{Re}} \quad (96)$$

Nesse contexto, como a massa específica e velocidade da corrente livre são constantes, a tensão de cisalhamento diminui em relação a x , devido ao termo $x^{1/2}$.

CONCLUSÃO

A engenharia possui grande macro-áreas de estudo que é responsável em formar uma união entre os conceitos abstratos matemáticos e a prática. Nesse âmbito, a modelagem na engenharia vem buscando descrever de forma mais real possível os diversos fenômenos físicos da natureza, a fim de compreender o comportamento de cada propriedade, grandeza e suas interações com meios internos e externos. Dentre a diversidade de problemas encontrados, a área da mecânica dos fluidos possui um grande destaque, devido às inúmeras aplicações de importância em diversos fenômenos da ciência.

A teoria da camada limite é um tema que ilustra de forma elegante a relação entre teoria e prática, pois o entendimento correto fornece um domínio de um conjunto de fenômenos físicos que estão submetidos a algumas interações com um fluido, isto é, superfícies que estão expostas a um determinado escoamento, como ao redor de uma asa de aeronave ou em tubulações hidráulicas. Contudo, a verdadeira assimilação vem somente com uma base sólida da teórica dos cálculos e equações diferenciais, pois, o conhecimento do fenômeno físico só é amplo se houver uma compreensão da modelagem matemática e da álgebra associada.

As equações diferenciais descrevem boa parte dos problemas encontrados na engenharia, e inclusive os fenômenos relacionados à mecânica dos fluidos que possuem as equações diferenciais como berço de sua modelagem. A partir disso, vale destacar novamente que as técnicas teóricas são de grande relevância para os profissionais de engenharia e aos graduandos, pois tais conhecimentos irão ligar o conjunto teórico acadêmico com a prática, fornecendo uma visão mais abrangente do problema e de suas variações.

REFERENCIAS

BOYCE, William E.; DIPRIMA, Richard C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Contorno** (9ª edição). LTC Editora. Rio de Janeiro, 2013.

BRANDÃO, F.C., 1991. **Algoritmos em diferenças finitas para solução de a camada limite hidrodinâmica laminar com variáveis primitivas**. Dissertação de Mestrado: Universidade Estadual de Campinas. São Paulo, Campinas. Brasil.

CARVALHO, Márcio Luiz Bunte; MAIA, Miriam Lourenço. **Cálculo Numérico (com aplicações)**. São Paulo: Editora Harbra Ltda, 1987.

CANEDO, Eduardo Luis. **Fenômenos de transporte**. Grupo Gen-LTC, 2000.

FOX, Robert W.; MCDONALD, Alan T.; PRITCHARD, Philip. **Introdução à mecânica dos fluidos**. Livros Técnicos e Científicos, 2006.

FREIRE, A. **Turbulência e seu desenvolvimento histórico**. III Escola de Primavera de Transição & Turbulência, p. 23-27, 2002.

FREIRE, A. P. **Teoria de Camada Limite**. Programa de Engenharia Mecânica: Universidade Federal do Rio de Janeiro. 1990.

GILAT, Amos; SUBRAMANIAM, Vish. **Métodos numéricos para engenheiros e cientistas: uma introdução com aplicações usando o MATLAB**. Bookman Editora, 2009

KREYSZIG, E. **Matemática superior para engenharia**. Livros técnicos e científicos, 2009.

PITTS, Donald R.; SISSON, Lighthon E. Fenômenos de transporte. **São Paulo, Brasil**, p. 319-328, 1981.

ZILL, Dennis G.; CULLEN, Michael R. **Equações Diferenciais**. Tradução Alfredo Alves de Faria. 2001.

ÇENGEL, YA CIMBALA. **JM Mecânica dos fluidos: Fundamentos e aplicações**. 2007.

VALLE, KNF. **Métodos Numéricos de Euler e Runge-Kutta**. Monografia apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática para Professores com Ênfase em Cálculo da UFMG, como parte dos requisitos à obtenção do título de Especialista em Educação Matemática, Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), Belo Horizonte, Brasil, 2012.

APLICAÇÕES DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS EM MODELAGEM MATEMÁTICA PARA ENGENHARIA: A TEORIA DA VIGA ELÁSTICA

Ana Clara Deps¹; Letícia Frauches Pereira¹; Moacir César da Vitória Júnior²; Natan Sian das Neves¹; Roger da Silva Rodrigues³; Vitor Pancieri Pinheiro⁴;

1. Acadêmico do curso de Engenharia Civil da Faculdade Brasileira – MULTIVIX
2. Mestre em Física, docente da Faculdade Brasileira – MULTIVIX
3. Mestre em Engenharia Mecânica, docente da Faculdade Brasileira – MULTIVIX.
4. Especialista em Docência do Ensino Superior, docente da Faculdade Brasileira - MULTIVIX

RESUMO

O presente artigo expõe a relevância conceitual e matemática do uso de equações diferenciais voltadas para modelagem das curvas elásticas de elementos reticulares. A importância do domínio das técnicas correlatas às equações diferenciais é imprescindível ao aluno graduando de engenharia, uma vez que sua correta manipulação pode conduzir a interpretações físicas assertivas em relação a diversos fenômenos físicos, dentre eles a Teoria da Viga Elástica. O entendimento do binômio formado entre o modelo físico conceitual e seu equacionamento matemático associado compõe uma visão completa de um fenômeno físico. Logo, há necessidade de um entendimento mais aprimorado de equações diferenciais, uma vez que elas descrevem modelos de engenharia, não só como peça matemática, mas como elemento representativo da interpretação física de cada por menor do fenômeno trabalhado.

Palavras-chave: Equações. Diferenciais. Teoria. Viga. Elástica. Mecânica.

ABSTRACT

This article exposes the conceptual and mathematics relevance of the use of differential equations oriented to modeling of elastic curves of reticular elements. The importance of the field of techniques related to differential equations is essential to graduating engineering student, once its correct handling can lead to physical assertive interpretations in relation to various physical phenomena, including the Theory of Elastic Beam. The understanding of the binomial formed between the conceptual physical model and its associated mathematical modeling makes up a complete picture of the physical phenomenon. Therefore, there is need for a more enhanced understanding of differential equations, since they describe engineering models not only as a mathematical piece, but as a representative element of physical interpretation of each detail of the studied phenomenon.

Keywords: Equations. Differential. Theory. Elastic. Beam. Mechanics.

INTRODUÇÃO

No contexto de ensino de engenharia civil, uma das áreas de maior destaque é aquela voltada para a mecânica dos sólidos, que inicia a formação de seus alicerces desde a mecânica estática, permeando os conhecimentos de análise estrutural e resistência dos materiais e acaba por culminar em disciplinas cujo foco é o dimensionamento de estruturas.

A análise estrutural e o dimensionamento desses elementos envolvem de forma geral uma preocupação com a resistência e a rigidez. Segundo ALMEIDA (2009) a capacidade de resistir aos esforços solicitantes sem que ocorra ruptura e de não deformar excessivamente sobre a ação desses carregamentos externos caracteriza, respectivamente, os conceitos de resistência e rigidez. É no segundo conceito que reside o foco do presente desenvolvimento, uma vez que é possível determinar os deslocamentos sofridos por um elemento mecânico ou estrutura sob carregamento. Dentro do escopo de técnicas para determinação de deslocamentos e inclinações de estruturas, uma das ferramentas de maior relevância é a Teoria de Euler-Bernoulli para o cálculo da curva elástica em vigas. Tal teoria acaba por modelar o deslocamento em pontos da viga através de uma equação diferencial de quarta

ordem, em que tais deslocamentos dependem da magnitude da solicitação, da geometria e do material que constitui a viga (POPOV, 1978).

A importância das equações diferenciais é fundamental na modelagem matemática dos fenômenos físicos presentes em diversas áreas da ciência, em especial na engenharia. Dessa forma, assim como na teoria da viga elástica, diversos problemas de física aplicada utilizam ferramentas de equações diferenciais na composição de seus modelos matemáticos. Assim, o domínio dos conceitos e técnicas analíticas e computacionais ligadas às equações diferenciais é imprescindível.

TÉCNICAS ELEMENTARES DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

No desenvolvimento matemático que virá a seguir, no contexto da Teoria de Curvas Elásticas de Euler, as técnicas requeridas para a solução da equação final são relativamente simples. Essa conclusão deve ser analisada com cautela, pois da mesma forma que existem equações diferenciais de simples solução também há aquelas cuja solução analítica nem mesmo é conhecida, demandando dessa forma uma solução aproximada por técnicas computacionais.

O método de solução das equações diferenciais a ser utilizado em nossas análises é um dos mais triviais existentes nos cenários desse tipo de equação, e se chama método de integração direta. Esse método pode apenas ser aplicado a uma classe específica de expressões diferenciais, denotada equações de variáveis separáveis. O formato geral dessas equações pode ser visto abaixo.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(x)} \quad (1)$$

Observando a equação acima é possível perceber que a parte da direita é como em toda uma função de x e y . Entretanto, de forma que é possível distinguir e separar em duas funções independentes, uma apenas de x e outra apenas de y . A grande vantagem de se trabalhar com uma equação desse tipo é que pode-se agrupar os termos dependentes de x com o infinitesimal dx de um lado e analogamente termos dependentes de y com o infinitesimal dy , permitindo uma posterior solução por integração simples (BOYCE; DIPRIMA, 2014)(KREISZIG, 2009). Por exemplo, uma equação diferencial cuja solução usa-se a técnica de separação de variáveis é expressa pela equação 2.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{2y} \quad (2)$$

Separando as variáveis semelhantes e integrando ambos os termos, obtêm-se:

$$\int 2y dy = \int x^2 dx \Rightarrow y^2 = \frac{x^3}{3} + C \quad (3)$$

A constante C é determinada quando o problema apresenta algum valor inicial ou uma condição de contorno. Analisando outro exemplo um pouco mais interessante, envolvendo funções trigonométricas.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y \cos x}{1+2y^2} \quad (4)$$

Analogamente, separando as variáveis e integrando.

$$\int \frac{(1+2y^2)}{y} dy = \int \cos x dx \Rightarrow \ln|y| + y^2 = \text{sen}x + C \quad (5)$$

Com o objetivo de demonstrar de forma didática o mecanismo de solução de uma equação de variáveis separáveis, tomemos a seguinte equação diferencial abaixo para manipular.

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = -w(x) \quad (6)$$

Uma rápida análise no lado direito da equação 6 mostra uma função exclusiva de x , dada por $w(x)$, que representa a função de carregamento externo sobre uma estrutura. O termo produto EI presente no denominador representa o módulo de rigidez à flexão da estrutura e é considerado constante para a demonstração que segue. Como a equação 6 é de variáveis separáveis, um simples processo de integração sucessiva leva-nos a solução geral da equação 6, como pode ser visto na sequência algébrica abaixo.

$$EI \frac{d^3 y}{dx^3} = v = - \int w dx + C_1 \quad (7)$$

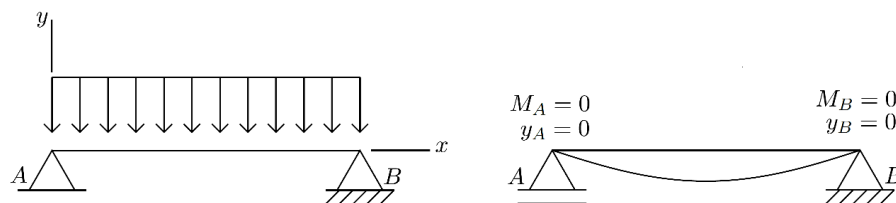
$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = M = - \iint w dx + C_1 + C_2 \quad (8)$$

$$EI \frac{dy}{dx} = EI\theta = - \iiint w dx + \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + C_3 \quad (9)$$

$$EI y = - \int \int \int w dx + \frac{1}{6} C_1 x^3 + \frac{1}{2} C_2 x^2 + C_3 x + C_4 \quad (10)$$

É fácil observar que como as múltiplas integrações são indefinidas, cada passo gera uma constante a determinar. Nossa capacidade de inferir sobre tais constantes depende do conhecimento sobre a variável diferenciada, y , e suas derivadas em alguns pontos particulares da estrutura.

Figura 1 – Condições de contorno em uma estrutura



Fonte: Elaborado pelo autor

Em uma viga biapoiada submetida a um carregamento uniforme (Figura 1), é possível analisar que as condições de contorno desse sistema estão localizadas nos pontos A e B , nos quais respectivamente são considerados que os descolamentos verticais e os momentos fletores são nulos. A partir destas informações, basta aplicar tais condições nas equações geradas para determinar cada uma das constantes C_1, C_2, C_3, C_4 .

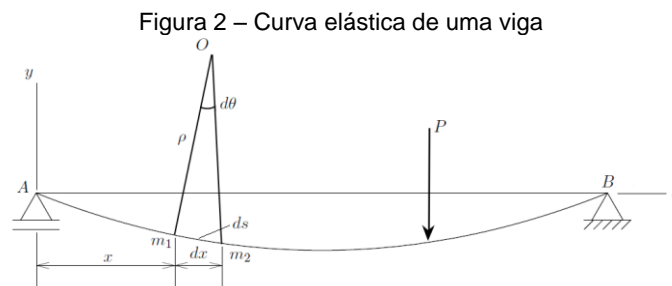
DESENVOLVIMENTO MATEMÁTICO

A Teoria da Viga Elástica foi concebida por Leonhard Euler e Daniel Bernoulli em meados dos séculos XVIII. Ambos foram extremamente influentes em diversas áreas do conhecimento, dentre elas mecânica dos fluidos, resistência dos materiais, cálculo

diferencial entre outras. As ideias que embasam a teoria são pautadas fortemente na geometria e cálculos diferencial e integral (NASH; POTTER, 2014)(TIMOSHENKO, 1975). Para iniciar o desenvolvimento matemático da equação da curva elástica para vigas é preciso relembrar uma expressão originária da modelagem de flexão pura, que determina a curvatura de um membro solicitado por momento fletor. Tal equação e sua dedução podem ser facilmente encontradas em textos de resistências dos materiais.

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{EI_z} \quad (11)$$

Considera-se a figura 2 mostrada abaixo como um esquema de uma viga deformada, cujos elementos geométricos são utilizados na dedução a seguir.



Fonte: Elaborada pelo autor

Observando o esquema acima, é trivial observar com apoio da trigonometria básica que:

$$ds = r d\theta \quad (12)$$

Rearranjando a equação 12 de forma a explicitar a curvatura, tem-se:

$$\frac{1}{r} = \left| \frac{d\theta}{ds} \right| \quad (13)$$

Vamos assumir o módulo como sendo positivo, já que os dois resultados são possíveis de acordo com o sinal do momento fletor.

$$\frac{1}{r} = \frac{d\theta}{ds} \quad (14)$$

Como na prática da engenharia civil trabalha-se com pequenas deformações temos que a curva elástica é achatada e pode-se adotar as hipóteses simplificadoras abaixo.

$$ds \approx dx \quad (15)$$

$$\theta \approx \text{tg} \theta = \frac{dy}{dx} \quad (16)$$

Aplicando as simplificações contidas nas equações 15 e 16 obtém-se:

$$\frac{1}{r} = \frac{d^2y}{dx^2} \quad (17)$$

Observe que de acordo com o sistema de coordenadas posto em nosso esquema da figura 2 o deslocamento vertical ou deflexão de cada ponto da viga é dado por y . Portanto, a expressão 17 explicita a curvatura em função da flecha. Dito isso, igualando-a às expressões 11 e 17 chega-se a equação diferencial da curva elástica:

$$EI_z \frac{d^2y}{dx^2} = M \quad (18)$$

A equação 18 evidencia a dependência da flecha com o carregamento, geometria e material, o que se mostra intuitivo. As relações diferenciais existentes entre carregamento, esforço cortante e momento fletor são postas abaixo.

$$\frac{dM}{dx} = V \quad \frac{dV}{dx} = -q \quad (19)$$

Por fim, utilizando as relações conceituais acima, é possível escrever a equação diferencial da curva elástica de duas formas alternativas, mostradas a seguir.

$$EI_z \frac{d^3y}{dx^3} = V \quad (20)$$

$$EI_z \frac{d^4y}{dx^4} = -q \quad (21)$$

Para o caso de vigas delgadas em que deformações mais significativas podem ocorrer, é preciso abandonar as simplificações 15 e 16 e considerar a tangente da curva elástica em cada ponto como sendo:

$$\theta = \arctg\left(\frac{dy}{dx}\right) \quad (22)$$

Com isso substitui-se a equação 22 na equação 14, tem-se:

$$\frac{1}{r} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{d \arctg\left(\frac{dy}{dx}\right) dx}{dx ds} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} \quad (23)$$

A equação 23 é chamada de fórmula exata da curva elástica, pois não contém aproximações para pequenas deformações, sendo uma expressão geral de cálculo. A mesma que foi concebida nos trabalhos de Leonhard Euler.

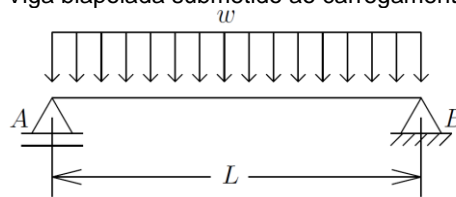
MODELAGEM NA ENGENHARIA

É grande a importância das equações diferenciais aplicadas à modelagem na engenharia. Essa relevância se deve ao fato de que vários dos principais fenômenos físicos pesquisados por engenheiros, matemáticos, físicos ou mesmo químicos são passíveis de modelagem através dessa classe tão versátil de equações. Dentre os fenômenos de interesse para a engenharia está o problema da determinação da curva elástica de uma viga deformada. Esse problema é modelado de forma eficaz pela equação da curva elástica mostrada na seção anterior. De forma a exemplificar a aplicação da teoria da viga elástica seguem dois casos de vigas recorrentes na engenharia civil: uma estrutura isostática e outra hiperestática.

ANÁLISE DE ESTRUTURA ISOSTÁTICA

Esse tipo de estrutura apresentada é configurada de forma a restringir seus graus de liberdade com, estritamente, os apoios necessários, ou seja, suas reações de apoio podem ser integralmente calculadas apenas com as equações de equilíbrio (BEER et al., 2015). Na figura 3 é apresentada uma viga biapoiada, submetida a um carregamento distribuído.

Figura 3 – Viga biapoiada submetido ao carregamento distribuído



Fonte: Elaborada pelo autor

É conveniente escrever a equação da curva elástica em relação ao carregamento que a estrutura está submetida.

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = -w \quad (24)$$

Para resolver a equação 24, basta usar a técnica de separação de variáveis e integrar ambos os lados da equação.

$$EI \frac{d^3 y}{dx^3} = V(x) = -wx + C_1 \quad (25)$$

Observe que surge uma constante C_1 , devido à integral ser indefinida. Repetindo esse processo para a equação 25, obtêm-se que:

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = M(x) = -\frac{1}{2}wx^2 + C_1x + C_2 \quad (26)$$

Como a viga está apoiada nas duas extremidades A e B , sabemos que $M(x=0) = 0$ e $M(x=L) = 0$. Daí, aplicando tais condições de contorno na equação 26, obtemos os valores das constantes $C_2 = 0$ e $C_1 = \frac{1}{2}wL$

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{1}{2}wx^2 + \frac{1}{2}wLx \quad (27)$$

Integrando duas vezes a equação 27, chega-se nas equações da inclinação $\theta(x)$ e do deslocamento y .

$$EI \frac{dy}{dx} = EI\theta = -\frac{1}{6}wx^3 + \frac{1}{4}wLx^2 + C_3 \quad (28)$$

$$EIy = -\frac{1}{24}wx^4 + \frac{1}{12}wLx^3 + C_3x + C_4 \quad (29)$$

Contudo, é necessário ainda determinar as constantes, isso será realizado de forma análoga. Nos apoios A e B o deslocamento vertical é nula, isto é, as condições de contorno são $y(x=0) = 0$ e $y(x=L) = 0$. Aplicando tais informações na equação 29, as constantes serão iguais $C_3 = 0$ e $C_4 = -\frac{1}{24}wL^3$.

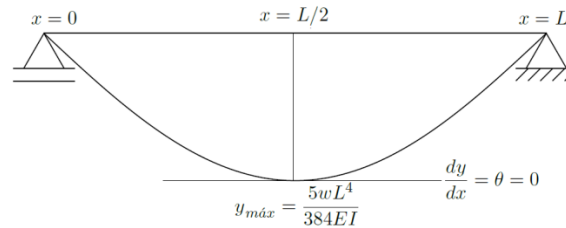
$$y = \frac{w}{24EI}(-x^4 + 2Lx^3 - L^3x) \quad (30)$$

Aplicando o valor da constante $C_3 = 0$ na equação 28 e igualando a zero, podemos notar que a inclinação é nula quando $x = L/2$. Substituindo $x = L/2$ na equação 30, obtêm-se o deslocamento vertical máximo ou flecha máxima $y_{m\acute{a}x}$.

$$|y|_{m\acute{a}x} = \frac{5wL^4}{384EI} \quad (31)$$

A flecha máxima, que ocorre no trecho de inclinação nula, está exposta no gráfico da configuração deformada abaixo.

Figura 4 – Linha elástica da viga



Fonte: Elaborada pelo autor

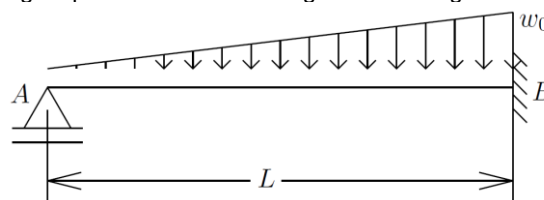
Uma rápida inspeção na equação 31 mostra que a flecha da viga biapoiada em questão depende da potência quarta de seu vão. Nesse raciocínio é possível inferir que vigas esbeltas não devem ter um grande trecho de vão entre apoios, uma vez que grandes deslocamentos poderiam ser observados, caracterizando uma peça com rigidez insuficiente, já que sofre deformações excessivas.

ANÁLISE DE ESTRUTURA HIPERESTÁTICA

As estruturas hiperestáticas possuem uma configuração diferente da isostática, pois em tais tipos de estruturas as equações de equilíbrio não são suficientes para determinar as reações de apoio e os carregamentos internos, ou seja, possuem um número de reações superiores ao necessário para manter a estrutura em equilíbrio, tornando mais complexa a sua análise (HIBBELER, 2006) (UGURAL, 2000).

Para resolver tais tipos de vigas, são conhecidos basicamente três métodos, isto é, método das forças, deslocamentos e Cross. Porém, é possível determinar as reações de apoio com os conceitos da teoria da curva elástica, como é analisado na viga demonstrada pela figura 5.

Figura 5 – Viga hiperestática com carregamento triangular ao longo do eixo



Fonte: Elaborada pelo autor

Realizando um corte genérico em um ponto qualquer x da viga, podemos escrever que o momento é dado pela seguinte relação:

$$M(x) = R_A x - \frac{w_0 x^3}{6L} \quad (32)$$

Substituindo a equação 32 na equação da curva elástica.

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = R_A x - \frac{w_0 x^3}{6L} \quad (33)$$

Integrando duas vezes a equação 33, obtêm-se as equações para a inclinação $\theta(x)$ e deslocamento vertical $y(x)$.

$$EI \frac{dy}{dx} = EI \theta = \frac{1}{2} R_A x^2 - \frac{w_0 x^4}{24L} + C_1 \quad (34)$$

$$EI y = \frac{1}{6} R_A x^3 - \frac{w_0 x^5}{120L} + C_1 x + C_2 \quad (35)$$

As constantes C_1 e C_2 serão determinadas através das condições de contorno. Sabe-se que na extremidade A temos que $y(x=0) = 0$, logo $C_2=0$. Na extremidade B (engastada) teremos as seguintes condições de contorno $\theta(x=L) = 0$ e $y(x=L) = 0$, aplicando nas equações 34 e 35 chegaremos no seguinte sistema.

$$\begin{cases} \frac{1}{2} R_A L^3 - \frac{w_0 L^3}{24} + C_1 = 0 \\ \frac{1}{6} R_A L^3 - \frac{w_0 L^4}{120} + C_1 L = 0 \end{cases} \quad (36)$$

O sistema é facilmente solucionado multiplicando a primeira equação por L e subtraindo da segunda equação, com isso obtêm o valor da reação na extremidade A .

$$R_A = \frac{1}{10} w_0 L \quad (37)$$

Para determinar a constante C_1 , aplicamos a equação 37 na expressão 34.

$$C_1 = -\frac{1}{120} w_0 L^3 \quad (38)$$

Por fim, substituindo os valores das constantes e da reação no apoio A , podemos escrever uma expressão para a inclinação e o deslocamento.

$$y = \frac{w_0}{120EI} (-x^5 + 2L^2 x^3 - L^4 x) \quad (39)$$

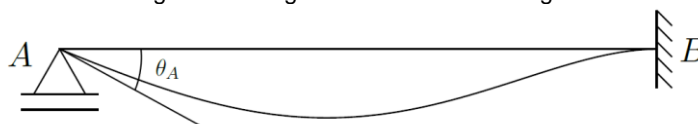
$$\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{w_0}{120EI} (-5x^4 + 6L^2 x^2 - L^4) \quad (40)$$

Fazendo $\theta(x=0)$, chegaremos na inclinação na extremidade A .

$$\theta_A = -\frac{w_0 L^3}{120EI} \quad (41)$$

A inclinação máxima posta pela equação 41 é ilustrada pela figura 6. É interessante observar que esta acontece no apoio de primeiro gênero, em detrimento ao engastamento que por conceito tem inclinação nula.

Figura 6 – Diagrama de deflexão da viga



Fonte: Elaborada pelo autor

O caso hiperestático trazido pelo equacionamento a priori releva uma grande potencialidade do método da integração dupla: a capacidade de calcular reações de apoio em estruturas hiperestáticas. Portanto, apesar de seu processo matemático ser longo, devido a sua aplicação simples, compõe ótima ferramenta inicial para análise de estruturas indeterminadas mais simples.

CONCLUSÃO

Em linhas gerais é possível dizer que as disciplinas voltadas para física e para matemática nas graduações de engenharia têm por objetivo central a formação de um arcabouço de conhecimentos que visa posterior aplicação em técnicas modelagem matemática, sendo estas aplicadas a uma ampla gama de fenômenos físicos. Dentre tais fenômenos a deflexão de vigas figura como área de estudo importante para a engenharia civil e mecânica.

A deflexão de vigas é assunto de grande relevância prática, ao passo que seu domínio constitui ferramenta básica para o projeto de vigas na construção civil e elementos de máquina. Entretanto, um entendimento pleno sobre o fenômeno só pode ser alcançado com suficiente capacidade de manipulação sobre a equação diferencial da curva elástica, o que deixa claro que um engenheiro só exhibe característica de análise natural uma vez que apresente, em paralelo, uma base sólida de conhecimentos sobre os modelos matemáticos e sua álgebra associada.

A importância do conhecimento, uso e manipulação de equações diferenciais pode ser mais uma vez reforçada, pois sem estas habilidades a modelagem não pode ser feita de forma consistente. Por fim é importante destacar que assim como o ciclo básico edifica uma ponte entre as ciências puras de física e matemática com a modelagem aplicada à engenharia, esta também liga a vertente acadêmica à aplicação prática. Em suma, todos os projetos reais que são executados na construção civil, assim como *softwares* responsáveis por dimensionamentos nas mais diversas áreas de engenharia têm como base os modelos matemáticos propostos pela academia.

REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, M. C. F. de. **Estruturas isostáticas**. São Paulo: Oficina de Textos, 2009.
- BEER, F. P. et al. **Mecânica dos Materiais**. 7ª Edição. Porto Alegre: AMGH Editora, 2015.
- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de contorno**(9ª edição). LTC Editora., Rio de Janeiro, 2014.
- HIBBELER, R. C. **Resistência dos materiais**. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006.
- KREYSZIG, E. **Matemática superior para engenharia**. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2009.
- NASH, W. A.; POTTER, M. C. **Resistência dos Materiais-5**. Porto Alegre: Bookman Editora, 2014.
- POPOV, E. P. **Introdução a mecânica dos sólidos**. São Paulo: Edgard Blucher, 1978.
- TIMOSHENKO, S. **Resistência dos materiais**. Rio de Janeiro: Livros técnico e científico editora, 1975.
- UGURAL, A. C. **Mecânica dos materiais**. Rio de Janeiro: Grupo Gen-LTC, 2000.

APLICAÇÕES DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS EM MODELAGEM MATEMÁTICA PARA ENGENHARIA: UM ESTUDO SOBRE A FLAMBAGEM DE COLUNAS

Gemilson Leandro da Silva Aguiar¹; Moacir César da Vitória Júnior²; Natan Sian das Neves¹; Roger da Silva Rodrigues³; Vitor Pancieri Pinheiro⁴

1. Acadêmico do curso de Engenharia Civil da Faculdade Brasileira – MULTIVIX
2. Mestre em Física, docente da Faculdade Brasileira – MULTIVIX.
3. Mestre em Engenharia Mecânica, docente da Faculdade Brasileira – MULTIVIX.
4. Especialista em Docência do Ensino Superior, docente da Faculdade Brasileira - MULTIVIX

RESUMO

O presente artigo tem por objetivo expor a relevância conceitual e matemática do uso de equações diferenciais voltada para modelagem do fenômeno de flambagem de colunas, no contexto da engenharia. O domínio das técnicas associadas às equações diferenciais é imprescindível ao engenheiro e graduandos em engenharia, uma vez que sua correta manipulação pode conduzir-los às interpretações físicas adequadas em relação a uma grande variedade de fenômenos físicos. O entendimento do binômio formado entre o modelo físico conceitual e seu equacionamento matemático associado compõe uma visão completa de um fenômeno físico. Logo, há necessidade de uma compreensão mais plena acerca de equações diferenciais, uma vez que estas descrevem modelos de engenharia, não só como elemento matemático, mas como meio representativo da interpretação física de cada pormenor do fenômeno trabalhado.

Palavras-Chave: Equações. Diferenciais. Flambagem. Colunas. Modelagem.

ABSTRACT

This article aims to expose the conceptual and mathematical relevance of the use of differential equations for modeling the column buckling phenomenon, in the context of engineering. The field of techniques associated with differential equations is essential to engineer and graduate students in engineering, since their correct handling can lead it to the appropriate physical interpretations in relation to a wide range of physical phenomena. The understanding of the binomial formed between the conceptual physical model and its associated mathematical modeling makes up a complete picture of the physical phenomenon. Therefore, there is need for a fuller understanding of differential equations, since they describe engineering models not only as a mathematical element, but as a representative mean of physical interpretation of each detail of the working phenomenon.

Keywords: Equations. Differential. Buckling. Column.; Modeling.

INTRODUÇÃO

Na seara científica e prática da engenharia, mais especificamente na área de mecânica dos sólidos, os temas ligados a solicitações básicas aplicadas a estruturas e elementos mecânicos tem elevada relevância, visto que, as aplicações em áreas como a mecânica e a construção civil demandam projetos precisos e capazes de garantir a integridade de seus componentes.

Em um contexto mais convergente à resistência dos materiais é possível destacar as solicitações fundamentais inerentes à flexão de vigas e à flambagem de colunas, cujos modelos matemáticos são representados via equações diferenciais. Uma análise cuidadosa dessas duas solicitações revela a similaridade existente entre os modelos matemáticos que descrevem os dois fenômenos. Em verdade, o modelo matemático é feito exatamente pela mesma expressão diferencial da curva elástica, diferenciando-se em seus conceitos apenas quanto à forma de aplicação da carga que origina as deflexões (TIMOSHENKO, 1975)(POPOV, 1978).

A gama fenômenos práticos em que se encontra a presença de peças solicitadas por flambagem é ampla e pode ser representada por exemplos mais evidentes como colunas de concreto armado em estruturas até algumas outras mais implícitas e de natureza mais mecânica como amortecedores e bielas de motores a combustão. Em linhas gerais a modelagem da flambagem de barras utilizando as equações diferenciais vem de forma substancial destacar o papel protagonista desempenhado por essa classe de equações na modelagem de diversos problemas práticos ligados à engenharia em suas diversas vertentes.

TÉCNICAS ELEMENTARES DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Um dos grandes motivos do uso das equações diferenciais na modelagem para ciências exatas em geral deve-se a sua versatilidade, podendo estas oscilar desde equações extremamente simples a modelos de grande complexidade. Daí surge a necessidade de organizar essas equações em classes, segundo alguns critérios específicos. Um dos critérios mais abrangentes seriam a bipartição em equações diferenciais parciais e equações diferenciais ordinárias, que destoam quanto à quantidade de parâmetros independentes (KREYSZIG, 2009)(BOYCE; DIPRIMA, 2014). O fenômeno físico da flambagem, dentre outros de grande importância na engenharia, é modelado na quase totalidade de seus casos por equações ordinárias de segunda ordem. Tais equações podem ser escritas em sua forma mais geral como:

$$A(x) \frac{d^2y}{dx^2} + B(x) \frac{dy}{dx} + C(x)y = D(x) \quad (1)$$

A equação acima representa a estrutura de uma equação diferencial de segunda ordem não homogênea com coeficientes variáveis, o que configura seu modelo mais abrangente. A solução de um caso como este deve ser composto por uma solução que atenda à versão homogênea da equação 1 superposta com outra solução que atenda somente a parte não-homogênea representada pela função $D(x)$. A forma da solução geral pode ser expressa por:

$$y = y_h + y_p \quad (2)$$

Em relação à homogeneidade, a equação 1 pode ser considerada homogênea quando o termo $D(x)$ for nulo. Já em relação aos coeficientes dividem-se as equações em tipos de coeficientes constantes ou coeficientes variáveis, sendo as primeiras de mais fácil solução. Para uma equação homogênea de coeficientes constante temos a seguinte estrutura, em que a , b e c são constantes.

$$a \frac{d^2y}{dx^2} + b \frac{dy}{dx} + cy = 0 \quad (3)$$

Suponha que uma função do formato $y = e^{\lambda x}$ seja uma boa proposta de solução para a equação 3. Substituindo a proposta na mesma, tem-se:

$$a\lambda^2 e^{\lambda x} + b\lambda e^{\lambda x} + ce^{\lambda x} = 0 \quad (4)$$

Rearranjando a equação acima e evidenciando o termo exponencial, pode-se apresentar:

$$e^{\lambda x}(a\lambda^2 + b\lambda + c) = 0 \quad (5)$$

Uma inspeção simples na equação 5 mostra que a obediência da igualdade depende da nulidade do termo entre parênteses, uma vez que, uma função exponencial não pode assumir valor nulo. Dessa forma tem-se que:

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \quad (6)$$

A equação 6 é denotada equação característica, cuja principal utilidade é determinar o formato da solução geral da equação diferencial ordinária. Essa prerrogativa é feita através do cálculo do discriminante (Δ) como mostrado a seguir para três casos (BOYCE; DIPRIMA, 2014).

Caso I: $\Delta > 0$

Um resultado com discriminante positivo indica que a equação característica 6 terá duas raízes reais e distintas. Dessa forma a solução da EDO homogênea associada pode ser escrita como:

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} \quad (7)$$

Caso II: $\Delta = 0$

Analogamente um resultado nulo do discriminante indica que a equação 6 terá uma raiz única. Dessa forma a solução da EDO homogênea associada pode ser escrita como:

$$y = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x} \quad (8)$$

Caso III: $\Delta < 0$

Por fim um resultado negativo para o discriminante indica que a equação 6 terá duas raízes complexas. Dessa forma, a solução da EDO homogênea associada pode ser escrita como:

$$y = C_1 e^{(\alpha+\beta i)\lambda x} + C_2 x e^{(\alpha-\beta i)\lambda x} \quad (9)$$

Evidenciando o exponencial formado pela parte real da raiz característica, tem-se:

$$y = C_1 e^{(\alpha+\beta i)x} + C_2 x e^{(\alpha-\beta i)x} \quad (10)$$

Por sua vez, as exponenciais de números complexos presentes na equação 10 podem ser mais bem trabalhadas com a fórmula de Euler mostrada a seguir.

$$e^{\beta i x} = \cos(\beta x) + i \operatorname{sen}(\beta i) \quad (11)$$

O uso da fórmula de Euler na equação 10 permite a escrita da seguinte solução geral para o caso com raízes complexas.

$$y = e^{\alpha x} (C \cos(\beta i) + D \operatorname{sen}(\beta i)) \quad (12)$$

Tais técnicas e desenvolvimentos mostrados a priori permitem o entendimento e compreensão matemática da modelagem aplicada a flambagem de barras com várias condições de contorno distintas.

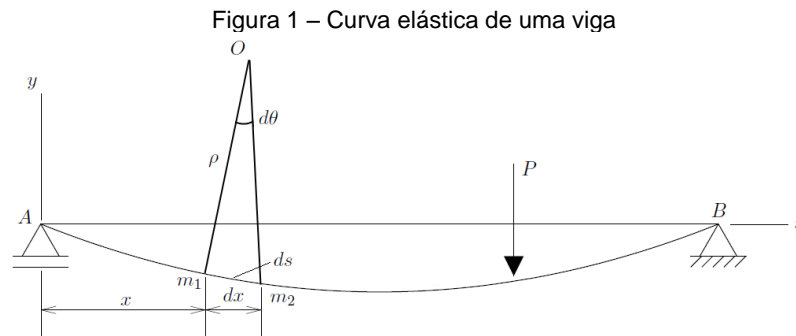
DESENVOLVIMENTO MATEMÁTICO

A Teoria da Viga Elástica foi concebida por Leonhard Euler e Daniel Bernoulli em meados do século XVIII. Ambos foram extremamente influentes em diversas áreas do conhecimento, dentre elas mecânica dos fluidos, resistência dos materiais, cálculo diferencial entre outras. As ideias que embasam a teoria são pautadas fortemente na geometria e cálculos diferencial e integral.

Para iniciar o desenvolvimento matemático da equação da curva elástica para vigas e colunas é preciso lembrar uma expressão originária da modelagem de flexão pura, que determina a curvatura de um membro solicitado por momento fletor. Tal equação e sua dedução podem ser facilmente encontradas em textos de resistências dos materiais.

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{EI_z} \quad (13)$$

Considera-se a figura 1 mostrada abaixo como um esquema de uma viga deformada, cujos elementos geométricos são utilizados na dedução a seguir.



Fonte: Elaborada pelo autor

Observando o esquema acima, é trivial observar com apoio da trigonometria básica que:

$$ds = r d\theta \quad (14)$$

Rearranjando a equação 14 de forma a explicitar a curvatura, tem-se:

$$\frac{1}{r} = \left| \frac{d\theta}{ds} \right| \quad (15)$$

Vamos assumir o módulo como sendo positivo, já que os dois resultados são possíveis de acordo com o sinal do momento fletor.

$$\frac{1}{r} = \frac{d\theta}{ds} \quad (16)$$

Como na prática da engenharia civil trabalha-se com pequenas deformações temos que a curva elástica é achatada e pode-se adotar as hipóteses simplificadoras abaixo.

$$ds \approx dx \quad (17)$$

$$\theta \approx \text{tg}\theta = \frac{dy}{dx} \quad (18)$$

Aplicando as simplificações contidas nas equações 17 e 18 obtém-se:

$$\frac{1}{r} = \frac{d^2y}{dx^2} \quad (19)$$

Observe que de acordo com o sistema de coordenadas posto em nosso esquema da figura 2 o deslocamento vertical ou deflexão de cada ponto da viga é dado por y . Portanto, a expressão 17 explicita a curvatura em função da flecha. Dito isso, igualando-a às expressões 13 e 19 chega-se a equação diferencial da curva elástica:

$$EI_z \frac{d^2y}{dx^2} = M \quad (20)$$

A equação 20 evidencia a dependência da flecha com o carregamento, geometria e material, o que se mostra intuitivo. As relações diferenciais existentes entre carregamento, esforço cortante e momento fletor são postas abaixo.

$$\frac{dM}{dx} = V \quad \frac{dV}{dx} = -q \quad (21)$$

Por fim, utilizando as relações conceituais acima, é possível escrever a equação diferencial da curva elástica de duas formas alternativas, mostradas a seguir.

$$EI_z \frac{d^3y}{dx^3} = V \quad (22)$$

$$EI_z \frac{d^4y}{dx^4} = -q \quad (23)$$

Para o caso de vigas delgadas em que deformações mais significativas podem ocorrer, é preciso abandonar as simplificações 17 e 18 e considerar a tangente à curva elástica em cada ponto como sendo:

$$\theta = \arctg\left(\frac{dy}{dx}\right) \quad (24)$$

Com isso substitui-se a equação 24 na equação 16, tem-se:

$$\frac{1}{r} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{d \arctg\left(\frac{dy}{dx}\right) dx}{dx ds} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} \quad (25)$$

A equação 25 é chamada de fórmula exata da curva elástica, pois não contém aproximações para pequenas deformações, sendo uma expressão geral de cálculo. Essa mesma equação foi concebida nos trabalhos de Leonhard Euler.

DESENVOLVIMENTO MATEMÁTICO

Uma forma interessante de expor a modelagem de flambagem de barras é baseada no desenvolvimento analítico da deflexão lateral que ocorre colunas para distintas condições de vinculação. Uma sensibilidade física maior sobre o tema pode ser desenvolvida quando, para uma primeira análise toma-se um modelo de coluna ideal. Analogamente a diversos outros fenômenos físicos modelados por equações diferenciais em engenharia, um modelo simples e idealizado tem como principal função a expor do mecanismo físico de um fenômeno em suas linhas mais gerais, não se preocupando *a priori* em gerar resultados realísticos, mas sim uma compreensão inicial, entretanto, fundamental acerca do problema. O dito modelo de coluna ideal é caracterizado pelas seguintes hipóteses simplificadoras, que tem por foco, a redução da complexidade física e matemática no intuito de gerar soluções possíveis. Elencam-se as hipóteses abaixo.

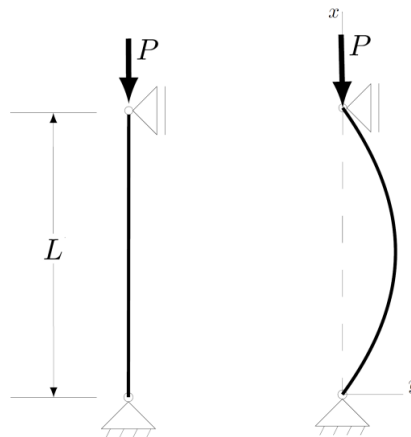
- I. Coluna perfeitamente reta antes da aplicação da carga
- II. Material Homogêneo
- III. Carga aplicada no centroide da área transversal
- IV. Material com comportamento elástico linear
- V. A flambagem ocorre em um único plano.

É possível equacionar em formato de função o deslocamento lateral sofrido por colunas ideais, bastando para isso o conhecimento de sua condição de vinculação. As três configurações mais clássicas são colunas presas por pinos em ambas às extremidades, colunas engastadas com extremidade livre e engastas-articuladas (BEER et al., 2015) (HIBBELER, 2006).

Configuração de Vínculos I

Com o intuito de determinar a carga mínima que provoca flambagem em barras ideais, considere uma coluna articulada em suas extremidades inferior e superior como mostrado na figura 2.

Figura 2 – Coluna biarticulada sujeita ao carregamento axial



Fonte: Elaborada pelo autor

A aplicação do método das seções na coluna revela um momento fletor interno com a seguinte estrutura $M(y) = -Py$. Tal constatação permite-nos escrever a equação da curva elástica como sendo:

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = -Py \quad (26)$$

Atribuindo uma nova constante k representada por:

$$\frac{P}{EI} = k^2 \quad (27)$$

E substituindo essa constante na equação 26, tem-se um formato mais sucinto mostrado na equação 28.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k^2y = 0 \quad (28)$$

A expressão 28 é uma equação diferencial de segunda ordem, homogênea e com coeficientes constantes. Dessa forma, sua solução geral é dada por:

$$y(x) = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right) + C_2 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right) = 0 \quad (29)$$

As condições de contorno que caracterizam uma coluna com extremidades articuladas são representadas por

$$y(x = 0) = 0 \quad (30a)$$

$$y(x = L) = 0 \quad (30b)$$

Aplicando-se as condições de contorno dispostas acima, é possível com facilidade perceber que $C_1 = 0$ e que:

$$\text{sen}\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}L\right) = 0 \quad (31)$$

Para obedecer à igualdade 31 é necessário escolher os arcos da função seno caracterizados por $kL = n\pi$. Tal implicação em conjunto com a equação 28 resulta em:

$$P = \frac{n^2\pi^2EI}{L^2} \quad (32)$$

Observa-se da equação 32 que existem diversos valores de carga que atendem com sucesso as condições de contorno propostas e por consequência promovem flambagem a coluna, entretanto, todas múltiplas de uma carga mínima ou fundamental denominada carga crítica de Euler, mostrada abaixo. É importante salientar que cada coluna com seus tipos de vinculação terá sua expressão específica de carga crítica, sendo a expressão a seguir válida apenas para nossa coluna articulada em ambas às extremidades.

$$P_{cr} = \frac{\pi^2EI}{L^2} \quad (32)$$

Substituindo a carga crítica de Euler na equação 29, obtêm-se uma expressão para o deslocamento horizontal de uma coluna.

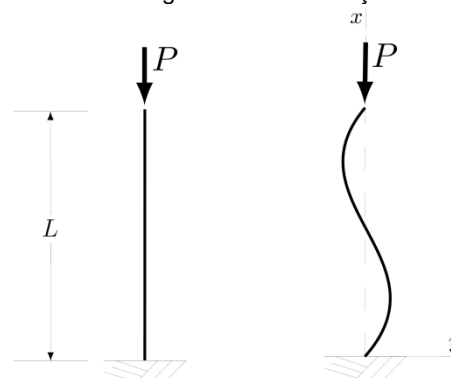
$$y(x) = C_2 \text{sen} \frac{\pi x}{L} \quad (32)$$

A constante C_2 pode ser entendida como a deflexão máxima $y_{máx}$ da coluna na forma flambada. Por outro lado, se analisar tal constante com conceitos trigonométricos, podemos distingui-la como a amplitude da função seno.

Configuração de Vínculos II

A determinação da carga de flambagem para colunas com diferentes tipos de vínculos segue a mesma lógica mostrada no caso passado, dessa forma, observe um esquema na figura 3 da forma deformada de uma coluna engastada em uma extremidade e livre em outra.

Figura 3 – Coluna engastada-livresob ação da carga P .



Fonte: Elaborada pelo autor

As condições de contorno conhecidas são as seguintes:

$$y(x = 0) = 0 \quad (35a)$$

$$y'(x = 0) = 0 \quad (35b)$$

$$y(x = L) = \delta \quad (35c)$$

O momento fletor interno de um trecho dessa coluna pode ser equacionado como mostrado abaixo.

$$M = -Py + P\delta \quad (36)$$

Substituindo o momento fletor da equação 36 na equação diferencial da curva elástica, representada a posteriori pela expressão 20, temos:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{P}{EI}y = \frac{P}{EI}\delta \quad (37)$$

A sentença diferencial 37 é uma equação de segunda ordem não homogênea, cuja solução será encontrada pelo método dos coeficientes indeterminados, que consiste em encontrar a solução particular da equação não homogênea (y_p) e somar com a solução da equação homogênea (y_h). A solução geral da equação 37 é dada por:

$$y(x) = y_h + y_p = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right) + C_2 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right) + \delta \quad (38)$$

Aplicando as condições de contorno 35a e 35b na equação 37 tem-se a solução:

$$y(x) = \delta \left[1 - \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right) \right] \quad (39)$$

Por fim, considerando-se a condição de contorno dada na equação 35b e impondo-a a expressão 39 temos a seguinte igualdade a ser obedecida:

$$\cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}L\right) = 0 \quad (40)$$

Tal igualdade é respeitada quando o arco obedece à seguinte lei de formação:

$$\sqrt{\frac{P}{EI}}L = \frac{n\pi}{2} \quad (41)$$

Com algebrismo simples a carga fica isolada da seguinte forma:

$$P = \frac{n^2\pi^2EI}{L^2} \quad (42)$$

Considerando que n varia nos inteiros positivos, a menor carga que podemos ter de forma a gerar flambagem na coluna é a chamada carga crítica, que para essa configuração de vinculação é dada por:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2} \quad (43)$$

Ao comparar o resultado trazido pela equação 43 com a carga crítica para uma coluna apoiada por pinos da equação 33 percebe-se que a configuração engastada-livre suporta uma carga crítica equivalente a apenas de um quarto da coluna apoiada por pinos. Essa sensibilidade da variação da carga crítica com a condição de vinculação pode ser generalizada de forma mais sintética apresentando uma variável chamada comprimento efetivo posta a seguir, que representa um fator que pondera a carga crítica (NASH; POTTER, 2014)(UGURAL, 2000).

$$L_e = kL \quad (44)$$

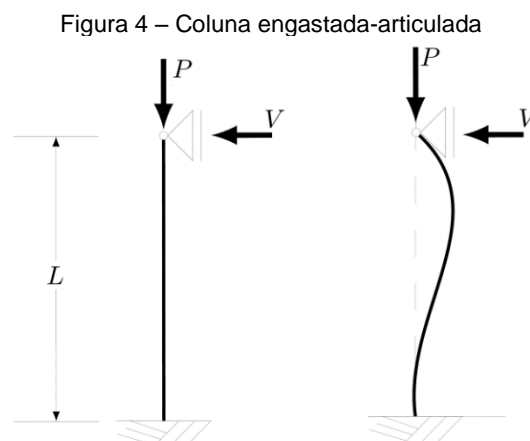
Na equação 44 o comprimento L deve ser corretamente interpretado como sendo o comprimento entre dois pontos de momento fletor nulo. Além disso K é conhecido como fator de comprimento efetivo e frequentemente é apresentado como único parâmetro para a determinação da carga crítica de uma determinada configuração de apoio. Sabido isso, torna-se possível escrever a equação 45.

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2} \quad (45)$$

A Equação acima é denotada como *carga crítica de Euler generalizada*, sob ação do comprimento efetivo.

Configuração de Vínculos III

Por fim numa terceira condição de vinculação uma coluna com extremidade inferior engastada e apoiada por pinos na superior é proposta e seu esquema segue na figura 5.



Fonte: Elaborada pelo autor

As condições de contorno para essa configuração de apoios resumem-se a três dados de inclinação-deflexão postos abaixo.

$$y(x = 0) = 0 \quad (46a)$$

$$y'(x = 0) = 0 \quad (46b)$$

$$y(x = L) = 0 \quad (46c)$$

Durante a flambagem a articulação superior produzira uma reação lateral V , portanto para esse o momento fletor incluirá esse efeito, podendo a equação da linha elástica ser escrita como:

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = -Py + V(L - x) \quad (47)$$

Chamando $\alpha^2 = \frac{P}{EI}$ para maior compactação, tem-se a equação 47 rescrita como:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \alpha^2 y = \frac{V}{EI}(L - x) \quad (48)$$

A equação 48 por sua vez é uma equação diferencial de segunda ordem linear, não homogênea assim como a equação 10. A solução dessa equação consiste analogamente ao caso passado em solucionar a parte homogênea e não homogênea separadamente e sobrepor as soluções. A solução geral é dada abaixo.

$$y(x) = C_1 \cos(\alpha x) + C_2 \sin(\alpha x) + \frac{V}{P}(L - x) \quad (49)$$

Derivando a equação 48, obtém-se a equação da inclinação a seguir.

$$\frac{dy}{dx} = -\alpha C_1 \sin(\alpha x) + C_2 \cos(\alpha x) + \frac{V}{P} \quad (50)$$

Substituindo-se as condições de contorno 46a e 46b nas equações 48 e 49, respectivamente é possível concluir que:

$$C_1 = -\frac{V}{EI}L \quad C_2 = -\frac{V}{P\alpha} \quad (51)$$

Com as constantes da equação 51 determinadas é possível inseri-las novamente na equação 49 e reescrevê-la da seguinte forma:

$$y(x) = C_1 \cos(\alpha L) + C_2 \sin(\alpha L) = 0 \quad (52)$$

Com isso usa-se a condição de contorno restante dada pela equação 46c chegando-se equação de existência a seguir:

$$tg(\alpha L) = \alpha L \quad (53)$$

As raízes da equação 53 são obtidas numericamente, e dentre elas a menor é apresentada abaixo.

$$tg(\alpha L) = 4,493 \quad (54)$$

Com algum algebrismo simples é possível demonstrar que a carga crítica é dada por:

$$P_{cr} = \alpha^2 EI = \frac{20,18EI}{L^2} \approx \frac{\pi^2 EI}{(0,7L)^2} \quad (55)$$

A diferença dessa carga crítica para a de uma coluna articulada é que seu comprimento é efetivo é dado por $L_e = 0,7L$ ou ainda, seu fator de comprimento efetivo é de $K = 0,7$. Isso

significa na prática que é preciso uma carga crítica maior para flambar uma coluna com tal condição de vinculação.

CONCLUSÃO

A simples observação da estrutura curricular de um curso de engenharia, independente da vertente específica, mostra um extenso trabalho sobre disciplinas como física e cálculo diferencial e integral no sentido de fornecer alicerces e ferramentas ao futuro engenheiro, de forma a permitir que ele seja capaz de sintetizar os fenômenos de interesse da parte específica de seu curso em modelos matemáticos adequados, ou seja, que descrevam com fidelidade o problema físico tratado considerado as simplificações adotadas.

Nessa linha, no âmbito mais específico das engenharias civil e mecânica, a modelagem do fenômeno de flambagem de colunas constitui tema relevante quando objetiva-se dimensionar e projetar estruturas ou mesmo elementos máquinas. Diferentemente do fenômeno solicitante de flexão que ocorre em vigas e elementos carregados transversalmente, a flambagem deve ser tratada como proibitiva em projetos de engenharia, a fim de garantir a integridade estrutural mecânica do projeto.

Por conseguinte é de bom grado salientar que a capacidade de projetar, dimensionar, calcular e executar um projeto com sucesso está intimamente relacionado com o domínio completo dos engenheiros sobre os fenômenos físicos que ocorrem no interior do projeto, assim como aqueles provenientes da interação do mesmo com sua vizinhança. Em outras palavras, a *expertise* sobre os modelos matemáticos descritos por equações diferenciais é de importância vital quando trata-se de engenharia, ao passo que a maioria absoluta dos tópicos físicos de interesse nesse âmbito são devidamente modelados por esse tipo de equações.

Portanto a compreensão por parte dos estudantes e futuros engenheiros acerca da importância de uma base sólida de fundamentos físicos e matemáticos puros é crucial, uma vez que sem essa base, o processo de modelagem de fenômenos físicos se torna inviável. Logo, é possível visualizar as disciplinas do ciclo básico do curso de engenharia, como efetivas ferramentas para o fim de modelagem e entendimento completo dos problemas práticos ligados ao cotidiano do engenheiro. Tal visão, além de ser a correta, constitui um parâmetro de motivação para os estudantes e consolida a ideia de que a engenharia é por conceito uma ciência aplicada.

REFERÊNCIAS

- BEER, F. P. et al. ***Mecânica dos Materiais***. 7ª Edição. Porto Alegre: AMGH Editora, 2015.
- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. ***Equações diferenciais elementares e problemas de contorno***. 9ª edição. LTC Editora., Rio de Janeiro, 2014.
- HIBBELER, R. C. ***Resistência dos materiais***. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006.
- KREYSZIG, E. ***Matemática superior para engenharia***. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2009.

NASH, W. A.; POTTER, M. C. **Resistência dos Materiais-5**. Porto Alegre: Bookman Editora, 2014.

POPOV, E. P. **Introdução a mecânica dos sólidos**. São Paulo: Edgard Blucher, 1978.

TIMOSHENKO, S. **Resistencia dos materiais**. Rio de Janeiro: Livros técnicos e científico editora, 1975.

UGURAL, A. C. **Mecânica dos materiais**. Rio de Janeiro: Grupo Gen-LTC, 2000.

ADIÇÃO DE NANOTUBOS DE CARBONO EM CIMENTO PORTLAND

Wandercleiton da Silva Cardoso¹; Arthur Eduardo Moreira²; Marco Antônio Valli²; João Pinto²; Vitor Toniato campana²

1. Mestre em engenharia de materiais e metalurgia pelo Instituto Federal do Espírito Santo, docente na Faculdade Multivix.

2. Graduando em Engenharia Civil pela Faculdade Multivix.

RESUMO

Esta pesquisa está fundamentada no estudo do concreto como condutor elétrico como alternativa tecnológica em aquecimento de edifícios e instalações de modo geral. Para tanto, foi investigado o desenvolvimento dessa tecnologia na última década, suas potencialidades, viabilidades técnicas e econômicas. Nesse contexto foram analisadas as propriedades elétricas do cimento e aplicação de corrente contínua em concreto. A condutividade elétrica do cimento é possível devido à inclusão de nanotubos de carbono durante sua fabricação. Foi realizada a compreensão desse processo, a partir de referências especializadas sobre o tema. Os nanotubos de carbono possuem arranjo hexagonal que se enrolam em forma cilíndrica são formados somente por elementos de carbono e são excelentes condutores elétricos. Esse material é amplamente utilizado nas áreas de eletrônica, tecnologia de materiais biológicos e compósitos multifuncionais. Percebe-se algumas barreiras na utilização desse material na indústria da construção devido ao elevado custo seguido pelo impacto ambiental. No futuro os resíduos da construção civil com nanotubos de carbono devem ter um processo de reciclagem apropriado a fim de evitar contaminação desse resíduo com outros materiais e o ar atmosférico. Também se discute as suas consequências para a saúde, devido à possibilidade desses materiais serem absorvidos pelo organismo. Entretanto, à medida que os estudos forem avançando esses questionamentos serão esclarecidos. No momento podemos afirmar que os testes realizados em obras de engenharia civil apresentaram aumento de durabilidade da edificação. Em suma essa tecnologia pretende inovar a engenharia do futuro: essa é a expectativa para o cimento com nanotubos de carbono.

Palavras-chave: Corrente. Concreto. Cimento. Condutor. Elétrico. Nanotubos. Carbono.

ABSTRACT

This study is about the concrete electrical conductor as a technological alternative for heating buildings and general facilities. It has researched the development of this technology in the last decade, its potential, technical and economic viability. In this context they were analyzed the electrical properties of cement and current application continues in cement. The electrical conductivity of cement is possible because of the addition of carbon nanotubes during your manufacturing. It was possible to understand this new technology from specialized references on the subject. The carbon nanotubes have cylindrical hexagonal array and are formed by carbon elements that are excellent electrical conductors. This material are widely used in electronics, biological materials technology and multifunctional composites. There are some barriers to the use of this material in the civil engineering industry because of the high cost and environmental impact. In future, the civil construction residues with carbon nanotubes need to have an appropriate recycling process as these residues can contaminate other materials and the atmosphere, as there is the possibility that these materials are absorbed by the human body. However, as the studies were advancing these questions will be clarified. At the moment we can confirm that the tests in civil engineering works increased by durability of the building. In sum this technology plans to innovate the future engineering: this is the expectation for cement with carbon nanotubes.

KEYWORDS: Current. Concrete. Cement. Electrical. Conductor. Carbon. Nanotubes.

INTRODUÇÃO

Atualmente o cimento é um mau condutor de elétrico, mas essa característica está sendo modificada e esse material poderá ter outras aplicações além da função estrutural. A pesquisa do cimento como condutor elétrico é inovadora, pois atende aos critérios contemporâneos de sustentabilidade promovendo a resolução de problemas, como formação de gelo em edifícios e estradas através do aquecimento. Nesse sentido, o objetivo principal deste trabalho é avaliar as etapas de desenvolvimento do cimento condutor e aplicação dessa tecnologia na engenharia. (PÉREZ, CLIMENT, GARCÉS, 2010)

Essa nova tecnologia poderá ser usada, por exemplo, para aquecer edificações ou evitar a formação de gelo em infraestruturas como ruas, estradas, pistas de pouso entre outros elementos. (CHUNG, 2000)

A relevância do assunto é justificada em virtude da importância do uso das fontes energéticas do planeta de forma sustentável, pois essa nova tecnologia poderá ser usada, por exemplo, para aquecer edificações ou evitar a formação de gelo em infraestruturas como ruas, estradas e pistas de pouso. (CHUNG, 2000)

Esse assunto é de grande relevância internacional, mas para compreender o cimento condutor elétrico é necessário entender a tecnologia de mistura de nanotubos de carbono ao cimento. (WHITTINGTON, McCARTER, FORDE, 1981)

O cimento condutor é obtido através da adição de nanotubos de carbono na composição do cimento tradicional. A adição dos nanotubos de carbono não compromete as propriedades estruturais do concreto ou sua durabilidade. (VICENTE, 2010)

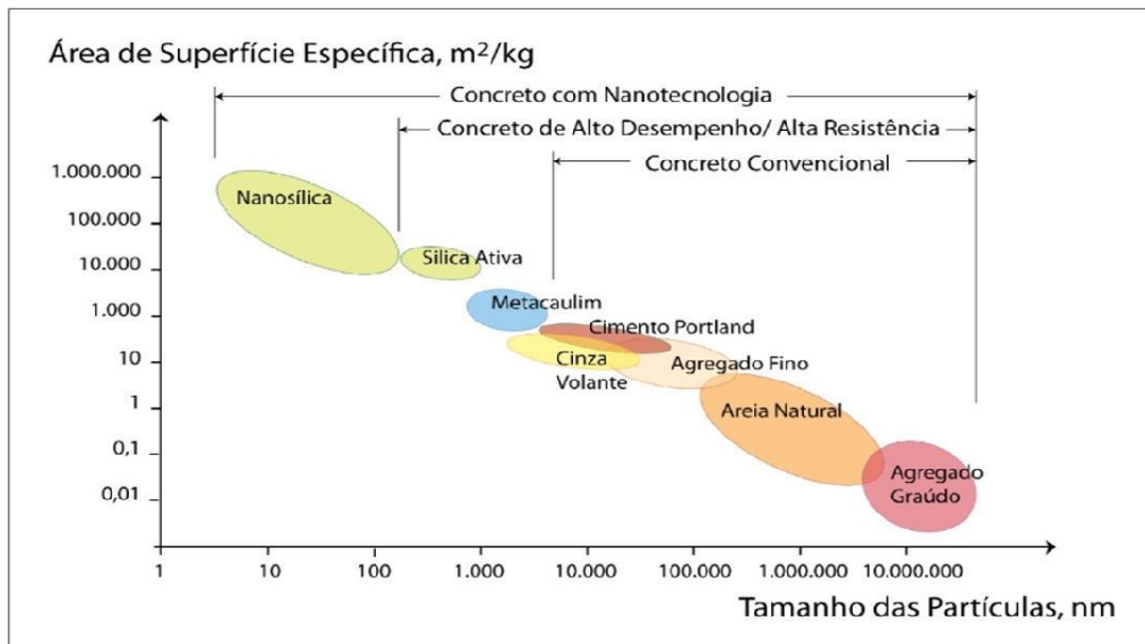
Para se obter um cimento que seja eficaz como elemento de aquecimento, ele deve ter uma baixa resistividade. Não se pode obter isso com os concretos convencionais, uma vez que eles são maus condutores de eletricidade. No entanto, isso pode ser feito com a adição de materiais condutores como os nanotubos de carbono. (VICENTE, 2010)

DESENVOLVIMENTO

A possibilidade de construir edificações condutoras elétricas abre novos horizontes sobre dessa técnica na qual empreende-se o uso de nanotecnologia para mistura de nanotubos de carbono ao cimento, que garante a propriedade de condutividade de eletricidade adequada para o aquecimento de edifícios e estradas com fins de impedir maiores problemas de mobilidade impedindo a formação de gelo por meio do aquecimento através de corrente contínua aplicado ao concreto. (CARMONA, GARCÉS, 2015)

Para compreender como funciona a condutividade elétrica do cimento é necessário compreender as condições de condutividade da eletricidade desse material e do concreto. O avanço da tecnologia em concretos vem atraindo o interesse de cientistas e investidores, devido à possibilidade de manipular a matéria de uma maneira diferente obtendo benefícios expressivos. Essa nova geração de concreto pode ser classificada de acordo com as dimensões dos agregados e ou adições usadas em sua confecção. Dessa forma, o concreto com adição de nanomateriais seria considerado de terceira geração, conforme descrito na Figura 1. (KIM, 2014)

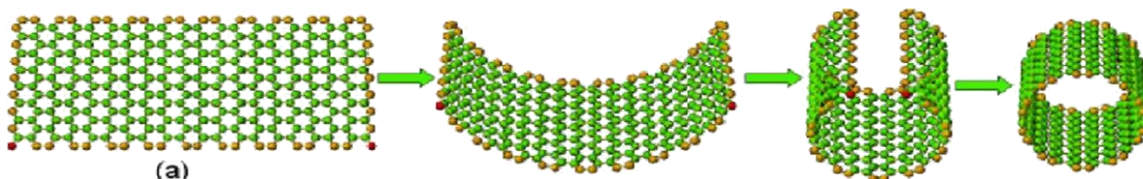
Figura 1 – Tamanho de partículas e superfície específicas ao concreto.



Os nanotubos de carbono são formados apenas por elementos de carbono num arranjo hexagonal, os quais se enrolam em forma de cilindro. A ligação carbono-carbono é a mais forte encontrada na natureza. Esse elemento tem sido amplamente utilizado em áreas como a eletrônica, tecnologia de materiais biológicos e compósitos multifuncionais. (BALDWIN, 1998)

Tratam-se de tubos de folhas de grafeno de uma estrutura cristalina hexagonal com nano escala de diâmetro conforme figura 2:

Figura 2 – Nanotubos de carbono – grafenos enrolados.



Atualmente na engenharia civil a cura do concreto é um parâmetro de controle, pois tem a finalidade de evitar a evaporação prematura da água, necessária para a hidratação do cimento, caso contrário rachaduras e fissuras podem aparecer e o concreto perder resistência mecânica não suportando grandes cargas. (FELDMAN, 2014)

O concreto é um aglomerante hidráulico e a água serve como meio de solução dos silicatos e aluminatos de cálcio presentes no cimento, também é responsável pelas reações que promovem a formação dos cristais que garantem o endurecimento e o ganho de resistência.

(CHUNG, 2000)

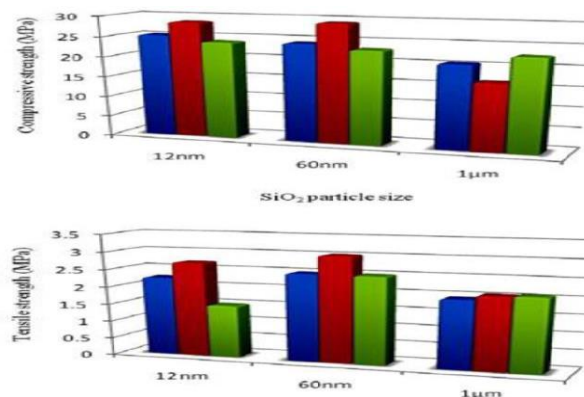
Nesse contexto o concreto condutor de energia terá um melhor controle de temperatura no momento da cura, isto é importante, pois mantendo a temperatura correta e controlando a evaporação das partículas de água mantendo a umidade ideal na mistura para que todo o processo de reação química do cimento se complete. A tabela 1 demonstra o tempo mínimo de cura dos tipos de cimento com relação água/cimento. (BATISTON, 2007).

Tabela 1 – Tempo mínimo de cura do concreto conforme relação A/C

FATOR ÁGUA /CIMENTO				
TIPO DE CIMENTO	0,35	0,55	0,65	0,7
CP I e II-32	2 dias	3 dias	7 dias	10 dias
CP IV-32	2 dias	3 dias	7 dias	10 dias
CP III-32	2 dias	5 dias	7 dias	10 dias
CPI e II-40	2 dias	3 dias	5 dias	5 dias
CP V-ARI	2 dias	3 dias	5 dias	5 dias

Nas etapas de protensão dos cabos, aplicaria a corrente contínua no concreto podendo haver uma mudança na sua estrutura química, de forma mais elástica e aderente facilitando o processo. Podemos sugerir também a aplicação de cimento condutor em aplicações estruturais de protensão. Na **Figura 3** podemos perceber o tamanho da partícula influencia os parâmetros de resistência à tração e compressão do concreto: compressão (a) e tração (b).

Figura 3 – Influência do tamanho da partícula nos valores de resistência a compressão e tração



Atualmente há pouca interação entre os estudos do comportamento elétrico do concreto com relação aos materiais e procedimentos utilizados na construção civil. Os testes e experimentos realizados são parciais, ou seja, os que analisam as características do concreto pouco analisam as questões de descarga elétrica. Por outro lado, os que analisam as questões de dissipação de corrente elétrica em estruturas também não avaliam as condições reais do concreto atravessado por correntes elevadas. (BALDWIN, 1998)

CONCLUSÃO

Algumas barreiras na utilização desses novos elementos na indústria da construção estão por vir. O primeiro deles é o financeiro, pelo elevado custo desses nanomateriais. Seguido pelo impacto ambiental, devido às demolições, como estes materiais se comportariam com a reciclagem e a contaminação do ar em função da mistura de materiais infinitamente pequenos. Do mesmo modo, se coloca também a questão de suas consequências sobre a saúde, pelo fato de sua facilidade de ingestão ou de assimilação pelo organismo, por simples contato. (NOKKEN, HOOTON, 2006)

O mercado global da nanotecnologia está a todo vapor no quesito de produção e comercialização. Uma previsão otimista chega e se comentar um faturamento de US\$ 3,5 trilhões em 2015. Esse tamanho de mercado, juntamente com o potencial multi-industrial da nanotecnologia, tem feito crescer o interesse de governos, corporações, empresas de capital de risco e pesquisadores acadêmicos pela nanotecnologia.

Atualmente o Ministério da Ciência, Tecnologia e Inovação (MCTI) lançou a Iniciativa Brasileira de Nanotecnologia (IBN), um conjunto de ações que tem por objetivo criar, integrar e fortalecer as atividades governamentais e os agentes ancorados na nanociência e nanotecnologia, para promover o desenvolvimento científico e tecnológico do setor, com foco na inovação.

Segundo o secretário do Desenvolvimento Tecnológico e Inovação do MCTI, Álvaro Prata, estão previstos investimentos de aproximadamente R\$ 440 milhões em 2013 e 2014. A IBN visa aproximar a infraestrutura acadêmica e as empresas, fortalecendo os laços entre pesquisa, conhecimento e setor privado. “A iniciativa está alinhada com a Estratégia Nacional de Ciência, Tecnologia e Inovação (Encti), de autoria do nosso ministério. O objetivo central da Encti é colocar ciência, tecnologia e inovação como eixo do desenvolvimento do país”, disse o ministro.

As ideias acima sugeridas pelo grupo podem melhorar a qualidade, ductilidade eficácia e resistência do concreto. Além desses ganhos podemos também reduzir o tempo ocioso das obras fazendo com que a rapidez de entrega seja maior e conseqüentemente a satisfação do cliente e o lucro da empresa.

Contudo, à medida que os estudos forem avançando poderão esclarecer-nos sobre os questionamentos iniciais, mas o que podemos adiantar é que até o momento foram feitos testes mecânicos e de aplicação em obras, e vai começar o de durabilidade. Apesar dos outros testes que precisam ser feitos, esse é um grande passo para a construção civil nos próximos anos. Uma nova tecnologia que vai trazer benefícios para a engenharia do futuro: essa é a expectativa para o cimento nanoestruturado com nanotubos de carbono

REFERÊNCIAS

BALDWIN, K., **Electrically conductive concrete: properties and potencial** *Construction Canada*, v. 89, nº 1, pp. 28-29, Mar. 1998

BATISTON, E. **Estudo Exploratório dos efeitos de nanotubos de carbono em matizes de cimento Portland**.UFSC, PPGEC, 2007.

CHUNG, D. D. L. “**Cement reinforced with short carbon fibers**”. *multifuncional material. Science Direct.*” New York, USA, v.31, n. 6-7, pp. 511-526, Feb 2000.

FELDMAN, R.; P., L.R., Jr.; and Chan, G., “Rapid Chloride Permeability Test on Blended Cement and Other Concretes: Correlations Between Charge, Initial Current and Conductivity,” ***Construction and Building Materials***, v. 13, n. 3, pp. 149-154, Mar. 2014

CARMONA, J. P., GARCÉS, M.A. CLIMENT. “Efficiency of a conductive cement-based anodic system for the application of cathodic protection, cathodic prevention and electrochemical chloride extraction to control corrosion in reinforced concrete structures”. ***Corrosion Science***, v.96, pp.102–111, Feb 2015.

KIM, H.S., SONG M., SEO J.W., SHIN U.S., “Preparation of electrically conductive bucky-sponge using CNT-cement: Conductivity control using room temperature ionic liquids”. ***Synthetic Metals***, n.196, pp.92–98, Feb. 2014.

NOKKEN, R., HOOTON R. “**Electrical Conductivity Testing**”.*Concrete international*, pp. 58-63, Feb 2006.

PÉREZ ,A., M.A. CLIMENT, P. GARCÉS. “Electrochemical extraction of chlorides from reinforced concrete using a conductive cement paste as the anode”. *Corrosion Science*, v. 52, Feb. 2010

VICENTE, O. Estudo sobre o comportamento elétrico do concreto utilizado em sistemas de aterramento estrutural. **Fenômenos Eletroquímicos relacionados ao concreto**. Londrina, 2010.

WHITTINGTON, H. W., McCARTER, J., FORDE, M. C. “The conduction of electricity through concrete”. ***Magazine of Concrete Research***, v. 33, pp. 48, Feb 1981.

ECONOMIA DE ENERGIA COM DISPOSITIVOS INTELIGENTES: ESTUDO DE CASO NA FACULDADE MULTIVIX VITÓRIA

Wandercleiton Cardoso², Brena Porcino¹; Johnnata Júlio¹; Júlio Cesar¹; Magno Alves¹; Raul Barbosa¹; Odimar Rocha¹; Otavio Baioco¹; Vitor Campos¹.

1. Acadêmico de Engenharia Mecânica da Faculdade Multivix Vitoria – ES;

2. Mestre em Engenharia de Materiais e Metalurgia e docente dos Cursos de Engenharias na Faculdade Multivix Vitória – ES.

RESUMO

A busca por soluções sustentáveis visando minimizar o impacto ao meio ambiente tornou-se prioridade mundial, visto que é do saber popular que a maioria das fontes atuais de energia são primeiramente esgotáveis e também prejudiciais ao ecossistema terrestre. O mercado de energia elétrica no Brasil cresce aproximadamente na ordem de 4,5% ao ano, e em 2012 atingimos o consumo de 448,1 TWh. Entre os anos de 2008 a 2012 a população brasileira cresceu, em média, 1,5% a.a., e o consumo per capita de energia elétrica apresentou crescimento médio de 4,7% a.a. no mesmo período. Tendo conhecimento dessas informações é possível minimizar os investimentos necessários para atender à demanda crescente por energia elétrica, focando em reduzir desperdícios, visto que em um estudo realizado com indústrias, comércios e setor público, constatou-se que os índices de desperdício chegam a 15%, 30% e 45%, respectivamente [EPE, 2013]. Nos últimos anos, os projetos de equipamentos e instalações elétricas já vêm sendo desenvolvidos com o foco em eficiência energética, mas a eficiência isoladamente não garante o uso racional da energia elétrica. O comportamento dos usuários e seus hábitos de utilização dos equipamentos representa hoje a variável mais flexível para a obtenção de economia de energia. Essa variável não sendo reduzida, obriga a automatização de sistemas para compensar o mau comportamento humano para com seu planeta. O presente trabalho tem como objetivo a avaliação da redução no consumo de energia, através da instalação de sensores de presença.

Palavras-chave: Automação. Sensores. Presença. Eficiência. Energética. Novas. Tecnologias. Economia.

ABSTRACT

The search for sustainable solutions to minimize the environmental impact has become a world priority as it is popular to know that most of today's energy sources are exhaustible first and also harmful to the terrestrial ecosystem. The electricity market in Brazil is growing roughly in the order of 4.5% per year, and in 2012 reached the consumption of 448.1 TWh. Between the years 2008 to 2012 the Brazilian population grew on average 1.5% pa, and the per capita consumption of electricity showed average growth of 4.7% pa in the same period. Knowing this information can minimize the investment required to meet the growing demand for electricity, focusing on reducing waste, whereas in a study of industries, businesses and the public sector, it was found that the waste rates reach 15% 30% and 45%, respectively [EPE, 2013]. In recent years, equipment designs and electrical systems has already been developed with the focus on energy efficiency, but efficiency alone does not guarantee the rational use of electricity. The behavior of users and their equipment usage habits, today represent the most flexible variable to obtain energy savings. This variable is not being reduced, requires automation systems to compensate for the evil human behavior towards his planeta. O present study aims to evaluate the reduction in energy consumption by installing motion sensors.

Keywords: Automation. Presence. Sensors. Energy. Efficiency. New Technologies. Energy saving.

INTRODUÇÃO

A energia elétrica ocupa um lugar de destaque na matriz energética Brasileira, sendo a modalidade de energia atualmente, mais consumida no país. O consumo crescente aliado à falta de investimento no setor de geração vem diminuindo a distância entre a demanda e a oferta, tornando o fornecimento cada vez mais crítico no curto prazo. (CREDER, 1991)

A busca de soluções para o problema de fornecimento abrange, entre outras alternativas, a construção de novas usinas hidroelétrica e termoelétrica, as alternativas que visam o uso racional e eficiente de energia elétrica apresentam geralmente, custo e tempo de retorno de investimento pequeno quando comparados aos valores de outras alternativas. Os resultados obtidos, relativos à redução de consumo, são imediatos, tornando o uso racional e eficiente de energia elétrica uma alternativa, de certa forma, natural para a solução de parte do problema de fornecimento no curto prazo. (CREDER, 1991)

Uma das linhas de ação para promover o uso racional e eficiente de energia elétrica é a intervenção junto às instalações consumidoras. Através de ações que otimizam os sistemas de cada uso final de energia elétrica presente na instalação, é possível reduzir seu consumo sem comprometer seu desempenho.

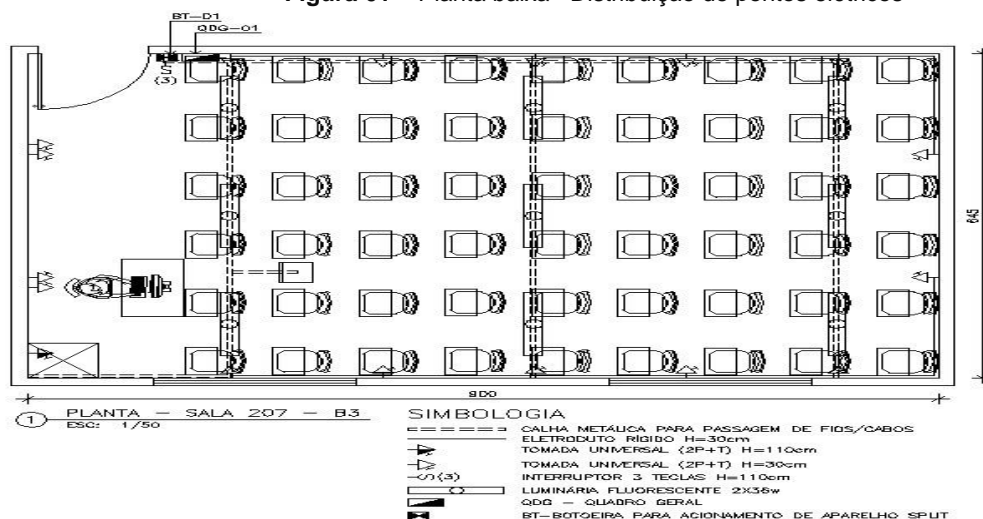
O presente trabalho propôs-se a estudar de forma clara as salas da Faculdade, visando assim otimizar e melhorar os gastos de energia e também uma possível solução de economia usando apenas os equipamentos citados no trabalho a baixo. (YAZIGI,1999)

DESENVOLVIMENTO

Visando obter economia de energia, observamos que alterando a cultura institucional e incrementando automação simples nas salas de aula, podendo ser extensiva a vários outros setores da faculdade, poderemos obter uma redução significativa no consumo geral de energia elétrica na instituição.

Para estudo do projeto, analisaremos uma sala de aula com dimensões 9,00 x 6,45m, conforme figura 01. (CREDER, 1991)

Figura 01 – Planta baixa –Distribuição de pontos elétricos



Cada sala de aula possui tomadas, luminárias e ar condicionado. Estes, por sua vez, são alimentados por um quadro de distribuição de energia. Muitas vezes, por falta de controle, salas de aula em toda instituição, apesar de estarem vazias, permanecem com luminárias e/ou, em sua maior parte das vezes, o ar condicionado ligado. Existe alguma forma de evitar esse desperdício de energia? Justamente em resposta a essa pergunta que buscamos uma forma simples e prática de controlar o uso desses equipamentos, minimizando assim o consumo de energia, que indiretamente estará contribuindo de forma sustentável ao meio ambiente.

Utilizando-se de sensores de presença que farão leituras temporizadas de movimentos nas salas, o fornecimento de energia estará ativo, desde que haja pessoas utilizando a sala; caso contrário, o fornecimento de energia será interrompido, desligando todos os pontos elétricos, inclusive o ar condicionado. Para tanto, analisamos a sala obtendo informações sobre as áreas onde ocorre maior incidência de movimento e verificando quantos sensores serão necessários para tal feito. Para cada sala deve-se fazer uma análise, pois as áreas podem não serem compatíveis entre si (ver figura 02).

Após verificar o melhor local para a instalação dos sensores, parafuse os sensores cerca de 2,20m de altura, que é medida ideal para um melhor desempenho dos sensores (ver figura 03).

Figura 02 – Planta baixa – Localização de sensores e projeção de raio de ação

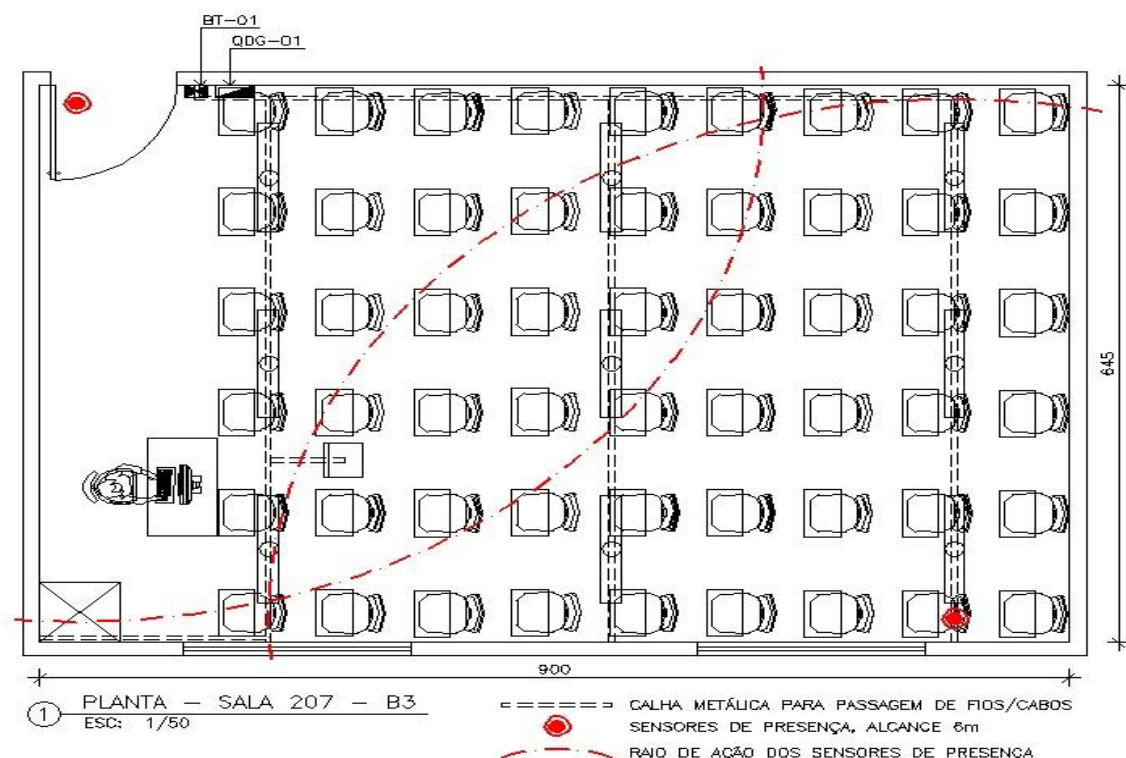
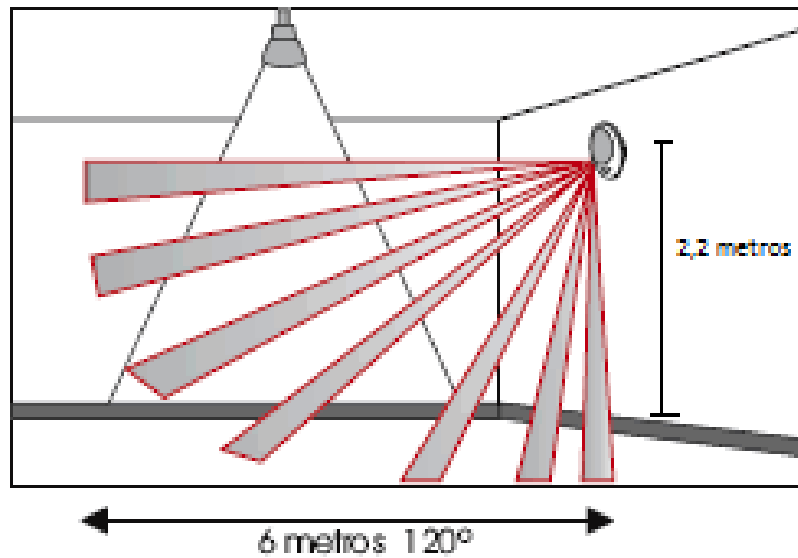


Figura 03 – Instalação de sensor



Fonte: Desconhecida

2.1 Materiais utilizados

(Sala 6,45 x 9,00m):

02 sensores (Intelbras-IVP3000 PET)

Características:

Sinal de captação com sensor duplo contra alarmes falsos;

Análise do sinal MPU, evitando alarmes falsos causados por animais domésticos;

Compensação automática da temperatura, adaptável as mudanças climáticas;

Contador de pulsos que controla a sensibilidade aumentando a função anti-intransferência;

Modos de alarmes opcionais para a conexão de diferentes centrais de alarme;

- Cabos

- Contatores

- Conector Sindal

- Diodos

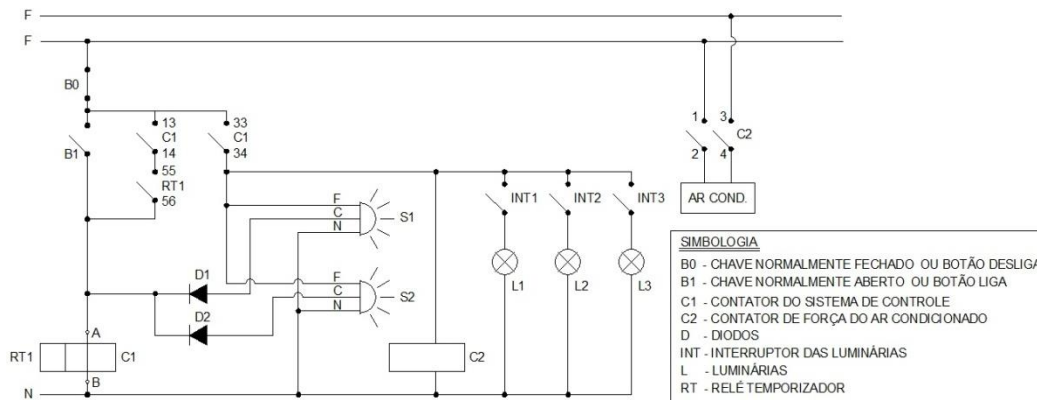
- Relé temporizado

- Modo de instalação:

Será ligado um cabo fase/neutro do painel até os sensores, de onde serão conectados dois cabos de retorno até o painel, especificadamente até o contator C1 (contator do sistema de comando) passando pelos diodos. Do painel sairão, também, dois cabos fase/neutro que serão conectados no contator C2 (contator do ar condicionado), e nas luminárias. (YAZIGI,1999)

Assim que acionada a botoeira, o circuito será energizado e os sensores serão ativados e manterá o contator C1 em funcionamento. Não detectando movimento, o sensor dará condições para o RT1 (Relé Temporizado) contar o tempo e desligar o circuito definitivamente. Entretanto, o circuito continuará funcionando caso os sensores sejam acionados, novamente, antes que o relé desligue o mesmo (ver figura 04). (YAZIGI,1999)

Figura 04 – Diagrama de montagem



VIABILIDADE DO PROJETO

Tomando como base a sala de aula 207 bloco 03, referência tomada para análise terá os seguintes pontos de energia:

- Lâmpada fluorescentes 2x32w 576 W
- Ar condicionado tipo Split 58000 Btu's/h 5655 W
- Tomadas 100 W 1600 W

Calcularemos o consumo de um equipamento multiplicando sua potência pelo tempo de funcionamento em horas.

Horário de utilização dos equipamentos período matutino:

Ligar: 07:00h, sendo o horário de início das aulas às 07:30h;

Aula: 07:30h às 10:50h;

Desligar: Mínimo 20 min após o término das aulas;

Horário de utilização dos equipamentos período noturno:

Ligar: 18:00 h, sendo o horário de início das aulas às 18:50h;

Aula: 18:50 h às 22:00h;

Desligar: Mínimo 20 min após o término das aulas;

Para efeito de cálculo de consumo utilizaremos somente os equipamentos responsáveis pelo maior consumo. Seguem abaixo descritos:

- Luminárias 576 W
- Ar condicionado 5655 W

Total de consumo é de **7.131 Watts/hora.**

Somatória do tempo, em horas, matutino: $0,50h + 3,33h + 0,33h = 4,16h$.

Somatória do tempo, em horas, noturno: $0,83h + 3,17h + 0,33h = 4,33h$.

Sendo assim, temos um consumo de $7.131 \times 8,49 = 60.542,19$ W/dia

Transformando W (Watts) em kW (quilo Watts), teremos o consumo de cerca de **60,54 KW/dia.**

Como as salas de aula, em um período mensal letivo, é utilizada cerca de 22 dias no mês, temos: $60,45 \text{ KW} \times 22 \text{ dias} = 1.329,90 \text{ KW/mês.}$

Com a instalação do dispositivo econômico, os equipamentos só terão seu start quando a sala de aula for ocupada, o que acarreta em um período menor de tempo tanto antecedente ao período de aula quanto ao período seguinte ao término das aulas, um somatório de

cerca de 30 minutos por turno, não levando em consideração os períodos em que a sala estará vazia, como em caso de término das aulas um pouco antes do horário previsto, o que acrescentaria em um tempo para economia de energia.

Considerando os dois turnos, temos 1h ao dia de economia:

$7.131 \text{ W} \times 1 \text{ h} = 7.131 \text{ W/dia}$ ou $7,13 \text{ KW/dia}$

Economia mensal de $7,13 \text{ KW} \times 22 \text{ dias} = 156,86 \text{ KW/mês}$ em uma única sala de aula. Sendo assim, o consumo total decresceria de $1.329,90 \text{ Kw/mês}$ para $1.173,04 \text{ KW/mês}$, aproximadamente.

Levando em consideração que o valor da energia cobrada é de R\$ 0,45312/KWh, temos um valor total mensal de:

- Sem o dispositivo: $1.329,90 \times 0,45312 = \text{R\$ } 602,604$

- Com o dispositivo: $1.173,04 \times 0,45312 = \text{R\$ } 531,528$

Sendo assim, teremos uma economia mensal de **R\$ 71,076** somente na sala de aula em estudo. O investimento para a instalação do dispositivo é de aproximadamente **R\$ 200,00**, o que nos trará retorno imediato em até 03 (três) meses.

A instituição possui, somente de sala de aula, cerca de 78 unidades com várias áreas e consumos variados de energia, distribuídas entre os blocos de número 1, 2, 3, 5 e 7.

Se, a *grosso modo*, considerássemos que todas as salas possuem a mesma área e o gasto mensal fosse o mesmo, teríamos:

- Sem o dispositivo: $\text{R\$ } 602,604 \times 78 = 47.003,112$

- Com o dispositivo: $\text{R\$ } 531,528 \times 78 = 41.459,184$

Sendo assim, teremos uma economia mensal de **R\$ 5.543,928** considerando somente as 78 salas de aula.

CONCLUSÃO

Racionalizar é usar de forma inteligente a energia elétrica, ou seja, é fazer com que a energia consumida resulte no máximo de benefícios para a sociedade como um todo. Assim sendo, é perfeitamente viável economizar energia elétrica sem reduzir o conforto, bem-estar e a segurança dos alunos, professores e funcionários. Com isso foi verificado uma economia de R\$ 5.543,928 considerando somente as 78 salas de aula, economia essa considerável de acordo com os estudos e análises.

REFERÊNCIAS

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 5410 – Instalações Elétricas de Baixa Tensão. Rio de Janeiro, 2004

CREDER, H. Instalações elétricas. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda., 1991.

EDIFÍCIOS INADEQUADOS. Revista Técnica, n. 33, mar./abr. 1998.

FORÇA DOMADA: quilowatts de economia. Revista Técnica, n. 53, ago. 2001.

MANUAL DO PROPRIETÁRIO. Termo de Garantia – aquisição, uso e manutenção do imóvel, operação do imóvel. Associação de Dirigentes de Empresas do Mercado Imobiliário do Distrito Federal (Ademi), 2004.

MANUAL PIRELLI DE INSTALAÇÕES ELÉTRICA. Pirelli. São Paulo: Editora Pini, 2001.

NORMA TÉCNICA DE DISTRIBUIÇÃO. NTD – 6.01. 1. ed. Brasília: CEB, 1997.

SOUZA, A. P. A. Uso da energia em edifícios: estudo de caso de escolas municipais e estaduais de Itabira, Minas Gerais. Dissertação (Mestrado)–Centro Federal de Educação Tecnológica, Minas Gerais, 2005.

YAZIGI, W. A técnica de edificar. São Paulo: Editora Pini, 1999.

ELETROGALVANIZAÇÃO NA INDÚSTRIA AUTOMOBILÍSTICA

Wandercleiton da Silva Cardoso¹, Brena da Silva Porcino², Vitor Toniato Campana²

¹Mestre em engenharia de materiais e metalurgia pelo Instituto Federal do Espírito Santo e docente nível superior dos cursos de engenharia da Faculdade Multivix.

²Graduando em engenharia mecânica Faculdade Multivix.

RESUMO

A corrosão do aço é um problema recorrente, principalmente, em ambientes com alto teor de cloretos e nesse caso a galvanização eletrolítica é uma alternativa eficiente para proteger os aços contra a corrosão. O processo de galvanização eletrolítica acontece através do revestimento do aço com zinco durante a eletrólise do metal a ser revestido que funciona como catodo e o metal que irá revestir a peça funciona como ânodo. A solução eletrolítica deve conter um sal composto por cátions do metal que se deseja revestir a peça. No processo de galvanização eletrolítica a cobertura do substrato do aço é mais homogênea quando comparado com a galvanização por imersão a quente. No processo de galvanização eletrolítica o controle da espessura do revestimento depende do tempo que a peça fica imersa no banho de sais de zinco. Na galvanização eletrolítica contínua em chapas de aço é utilizado o mesmo princípio básico utilizado da galvanização eletrolítica convencional. Neste trabalho, foi feita uma avaliação dos benefícios da galvanização eletrolítica contínua de chapas de aço, mostrando que esses revestimentos apresentam aplicações singulares na indústria automotiva. Esses aços galvanizados apresentam superfícies de alta qualidade com massa entre 50 e 80 g/m² de zinco depositado no substrato, suficiente para atender às exigências relacionadas à corrosão. Os aços eletrogalvanizados são ideais para painéis de automóveis, principalmente, quando comparados aos produtos galvanizados por imersão à quente com mesma espessura que exige um processo de fabricação bem mais complexo.

Palavras-chave: Galvanização. Eletrolítica. Galvanoplastia. Corrosão. Aços. Galvanizados.

ABSTRACT

Corrosion of steel is a common problem in environments with high levels of chlorides and these electroplating environments is an efficient alternative to protect steel from corrosion. The electroplating process occurs through the steel casing with zinc metal during the electrolysis to be coated which acts as cathode and the metal will coat the piece serves as the anode. The electrolyte solution must include a salt composed of zinc cations to be able to coat the steel. In the electroplating process, the steel substrate coverage is more homogeneous compared to hot-dip galvanized. In the electroplating process, control of coating thickness depends on the time that the piece is immersed in the zinc salt solution. In continuous electroplating steel plates is used the same basic principle used in conventional electroplating. This paper an evaluation of the benefits of continuous electroplating steel plate and it was shown that these coatings have unique applications in the automotive industry. These electrogalvanized steels have high quality surfaces with mass 50-80 g/m² zinc deposited on the substrate, sufficient to meet the requirements related to corrosion. The electrogalvanized steels are ideal for automobile panels, especially when compared to products by hot-dip galvanized with the same thickness requires a fabrication process much more complicated.

Keywords: Electrolytic. Galvanizing. Electroplating. Corrosion. Galvanized. Steel.

INTRODUÇÃO

A corrosão do aço é um problema global e recorrente, principalmente, em ambientes com alto teor de cloretos e anualmente os custos com corrosão representam cerca de 4% o PIB das nações industrializadas, e em média 5% está na economia dos países emergentes. No ano passado (2013) o PIB do Brasil foi de R\$ 4,84 trilhões, ou seja, a perda por corrosão considerando 5% do PIB representa um valor total de R\$ 242 bilhões (AGA, 2016).

Uma das maiores mudanças ocorridas nos últimos anos em relação à aplicação do aço como elemento estrutural, foi a utilização de aços revestidos com zinco para situações que exigem maior resistência à corrosão. A pressão dos usuários finais e dos fabricantes, que ocorreu na década de 80, foram as principais responsáveis por esse aumento do uso de aços galvanizados. (SERE, DEYA & SARLI, 2016)

A forma clássica de prevenção da oxidação foi, por muitos anos, a pintura. Atualmente, aços de maior valor agregado vêm ganhando mercado. É o caso dos aços revestidos com zinco, também conhecidos como galvanizados. O zinco tem a missão de se “sacrificar” para proteger o aço. Isso acontece porque o zinco é mais anódico e se corrói, originando uma proteção catódica. (ROVENTI et al, 2014)

A galvanização eletrolítica é o processo de revestimento do aço com zinco através da eletrólise onde o metal a ser revestido funciona como catodo e o metal que irá revestir a peça funcionam como ânodo. A solução eletrolítica deve conter um sal composto por cátions do metal que se deseja revestir a peça. No processo eletrolítico a cobertura do substrato do aço é mais homogênea e o controle da espessura do revestimento se dá pela velocidade com que a peça passa pelo banho de sais de zinco. (TUTIKIANI, HILGERTI & HOWLANDII, 2014).

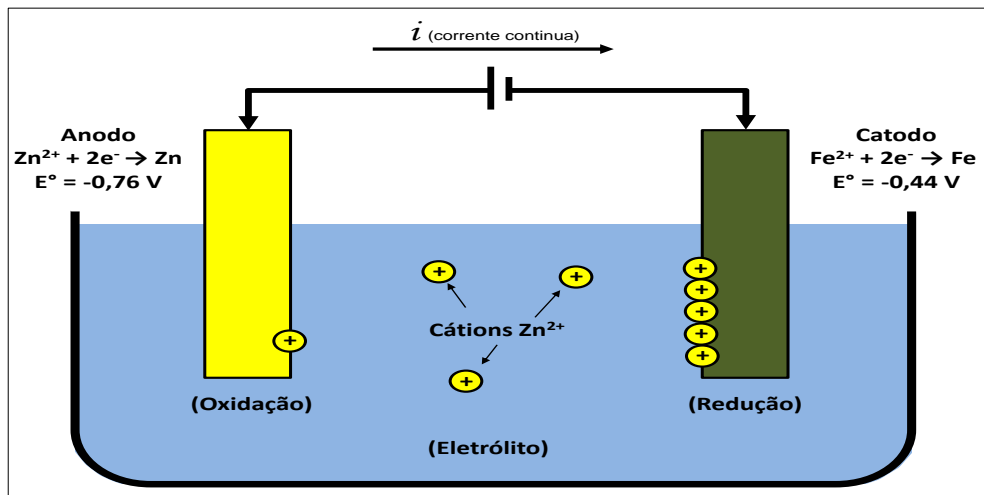
DESENVOLVIMENTO

A galvanização eletrolítica continua em chapas de aço, utiliza o mesmo princípio básico utilizado da galvanização eletrolítica convencional. Entretanto, o processo para chapas de aço é diferente, pois o revestimento eletro galvanizado é aplicado através da passagem da tira em alta velocidade por uma série de células de galvanização, aumentando a espessura do revestimento em pequenas quantidades cada vez que a tira passa por uma célula individual. (PEREZ et al, 2002)

Na galvanização eletrolítica o anodo é o zinco, o catodo é o aço e o eletrólito é o sulfato de zinco ou o cloreto de zinco. A energia elétrica é fornecida pela fonte de corrente contínua. No anodo, o zinco é oxidado e libera dois elétrons e se dissolve como cátion no eletrólito e no catodo de aço, cátions de zinco se combinam com dois elétrons (redução) e formam o zinco elementar, que se deposita sobre a superfície do aço. A solução de galvanização (eletrólito) carrega a corrente contínua entre o catodo e o anodo. (FAYALA et al, 2013)

O modelo esquemático da célula de galvanização que ocorre durante o processo de eletro galvanização está ilustrada na figura 1.

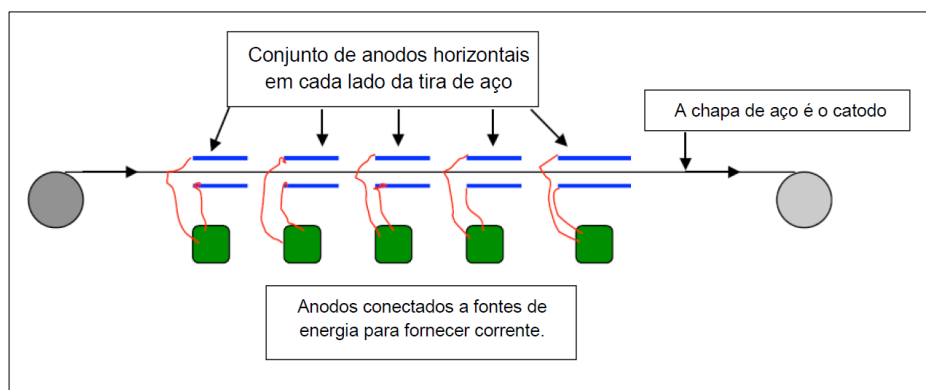
Figura 1 – Galvanização eletrolítica



No processo de galvanização eletrolítica contínua a operação se estende à galvanização de chapas de aço muito longas, superiores a 70 polegadas de largura. No processo eletrolítico contínuo uma série de células galvânicas como mencionado na figura 1 são alinhadas em sequência e as chapas de aços passam por estas células eletroquímicas em altas velocidades e cada conjunto anodo/catodo é conectado a uma fonte de energia. As chapas de aço são transportadas através de cilindros e motores e uma desbobinadeira na extremidade na entrada da linha é responsável em introduzir a chapa bobinada na seção de processamento e uma rebobinadeira na extremidade final da linha para reenrolar a chapa em uma bobina. (CABANELAS, 2007)

O modelo esquemático do processo de galvanização eletrolítica contínua é mostrado na figura 2.

Figura 1 – Galvanização eletrolítica contínua



O processo de eletro galvanização exige uma grande quantidade de energia elétrica para a aplicação de revestimentos de zinco. A exigência total de energia é uma função direta da espessura do revestimento que é necessária para atender às especificações do cliente. Por exemplo, a energia necessária para depositar uma massa de revestimento de zinco de 80

g/m² é aproximadamente duas vezes a quantidade necessária para depositar um revestimento de 40 g/m². Uma linha normal que tem a capacidade de processar de 70 a 120 toneladas/hora com uma massa de revestimento de 50g/m² de cada lado que consumirá centenas de milhares de ampères durante uma hora de processamento. É fácil de ver porque os gastos com energia são componentes de custo muito importantes para unidades que processam grandes quantidades de chapas eletro galvanizadas (AGA, 2016).

Os revestimentos eletro galvanizado de forma contínua possuem resistência à corrosão similar ao galvanizado por imersão à quente. Uma massa de revestimento de 100 g/m² galvanizado por eletrolise proporcionará basicamente o mesmo nível de proteção contra corrosão de um revestimento galvanizado por imersão à quente, porém os revestimentos galvanizados por imersão à quente fornecem adicionalmente proteção por barreira através da passivação da camada ETA que produz um filme muito mais aderente e resistente do que o filme passivo que é formado nos aços galvanizados por eletrólise (AGA, 2016).

Adicionalmente as chapas de aços galvanizadas pela eletrólise contínua pode receber um tratamento adicional na superfície do revestimento metálico de fosfato de zinco e deposição eletrostática de um primer de aderência epóxi isocianato alifático bicomponente seguido de revestimento de pintura de acabamento em multicamadas. Obviamente, a resistência à corrosão necessária para proteger um painel de um veículo é maior do que a que pode ser oferecida somente pelo revestimento metálico. A aplicação deste sobre uma camada metálica eletro galvanizada resulta em um sistema sinérgico, cuja resistência à corrosão é maior do que a soma de seus componentes individuais. (CABANELAS, 2007)

CONCLUSÃO

Com a galvanização, pode-se obter um revestimento completo sobre uma peça em alguns minutos, enquanto que por outro processo seriam necessárias horas ou dias. As modernas linhas de zincagem contínua, por exemplo, produzem, no ritmo de 500 m²/min, chapas com excelente qualidade de revestimento. Logo após a galvanização, a peça está pronta para ser utilizada, sem exigir preparação da superfície (lisa e brilhante), retoques ou pintura.

REFERÊNCIAS

AMERICAN GALVANIZERS ASSOCIATION. Duplex Systems. Disponível em: <<http://www.galvanizeit.org/corrosion/corrosion-protection/duplex-systems>> Acesso em: 18 de mar. 2016.

AMERICAN GALVANIZERS ASSOCIATION. Hot-Dip Galvanizing. Disponível em: <<http://www.galvanizeit.org/hot-dip-galvanizing>> Acesso em: 18 de mar. 2016.

CABANELAS, I., COLLAZO, A., IZQUIERDO, M., NOVOA, X. R., PEREZ, C., "Influence of galvanised surface state on the duplex systems behavior". *Corrosion Science*, v. 49, pp. 1816–1832, Dez. 2007.

FAYALA, I., DHOUBI, L., NOVOA, X.R., OUEZDOU, M. B., "Effect of inhibitors on the corrosion of galvanized steel and on mortar properties". *Cement & Concrete Composites*, v. 35, pp. 181–189, Dez. 2013.

ICZ. Portal da Galvanização: galvanização por imersão à quente. Disponível em: <<http://www.icz.org.br>>. Acesso em: 18 de mar. 2016.

PEREZ, C., COLLAZO, A., IZQUIERDO, M., MERINO, P., NOVOA, X. R., “Comparative study between galvanized steel and tree duplex systems submitted to a weathering cyclic test.” *Corrosion Science*, v. 44, pp. 481-500, Jun 2002

ROVENTI, G., BELLEZZE, T., GIULIANI, G., CONTI, C., “Corrosion resistance of galvanized steel reinforcements in carbonated concrete: effect of wet–dry cycles in tap water and in chloride solution on the passivating layer”. *Cement and Concrete Research*, v. 65, pp. 76–84, Dec. 2014

SERE, P. R., DEYA, C., ELSNER, C. I., DI SARLI, A. R., “Corrosion of painted galvanneal steel”. *Procedia Materials Science*, v. 8, pp. 1–10, Feb. 2015

TUTIKIANI, B.F., HILGERTI, T., HOWLANDII, J.J., “Comparativo da aderência do concreto com aço sem proteção e o aço galvanizado a quente. *Revista IBRACON*, v.7, n.2, pp. 82–89, Apr 2014.

MOTOR DE COMBUSTÃO INTERNA DE PISTÕES ROTATIVOS TRIANGULARES CURVILÍNEOS: WANKEL

Wandercleiton da Silva Cardoso¹, Vitor Toniato Campana², Alex Borges do Nascimento³, Fabiano Steiner Monteiro³, Franciely Costa Delunardo³, Gesiely Barcelos Matheus³

1. Mestre em engenharia de materiais e metalurgia pelo Instituto Federal do Espírito Santo e docente nível superior dos cursos de engenharia da Faculdade Multivix.

2. Graduando em engenharia civil pela Faculdade Multivix

3. Graduando em engenharia mecânica pela Faculdade Multivix

RESUMO

O motor da combustão interna rotativo de pistões triangulares curvilíneos, que giram em cavidades troncoidais foi desenvolvido pelo engenheiro alemão Felix Wankel. Esse motor funciona segundo os quatro tempos tradicionais do ciclo Otto. A montadora de automóveis Mazda foi a empresa que mais utilizou o motor Wankel em seus carros esportivos RX-7 e RX-8. No passado, várias empresas construíram automóveis com motores Wankel, tais como a NSU e a Citroen enquanto a Mercedes-Benz e GM fizeram protótipos veiculares com esta tecnologia. Algumas construtoras de motos como a Norton, a DKW Hercules e a Suzuki utilizam a tecnologia Wankel. Atualmente essa tecnologia é aplicada também em aviões e "hovercrafts", pelo seu baixo peso. Atualmente a utilização de motores Wankel é muito restrita na indústria automobilística, pois essas empresas estão receosas em investir nessa tecnologia em virtude de avanços tecnológicos do principal concorrente dos motores Wankel conhecido como motor quasiturbine que é a grande aposta do futuro.

Palavras-chave: Motor. Wankel. Combustão interna. Rotativo. Mazda.

ABSTRACT

The internal combustion engine the and rotary combustion piston curvilinear triangular, revolving troncoidais cavities was developed by German engineer Felix Wankel. This engine works on the four traditional Otto cycle times. The automaker Mazda was the company that used the Wankel engine in his sports car RX-7 and RX-8. In the past several empresas built cars with Wankel engines, such as NSU and Citroen while Mercedes-Benz and GM made vehicle prototype with this technology. Some motorcycle builders like Norton, DKW Hercules and Suzuki used the Wankel technology. Currently this technology is also applied in aircraft and "hovercrafts" for its low weight. Currently the use of Wankel engines is very restricted in the automotive industry, as these companies are afraid to invest in this technology due to technological advances of the main competitor of Wankel engines known as Quasiturbine engine that is the big bet of the future.

Keywords: Engine. Wankel. Combustion. Internal. Rotary. Mazda.

INTRODUÇÃO

No ano de 1924 Felix Wankel desenvolveu o primeiro motor rotativo, e, desde então, dedicou-se para melhorar seu projeto. O objetivo era criar um motor que funcionasse de modo mais suave e silencioso, devido a sua estrutura mais simples e com menos peças, comparado aos motores de pistão. Em 1951, Felix Wankel fez os primeiros contatos com os

engenheiros da NSU para estudar os problemas de vedação de espaços irregulares. Esses estudos resultaram na descoberta de que um motor triangular com lados convexos, girando em uma câmara poderia desenvolver um verdadeiro ciclo de quatro tempos. (GORDON et al, 1997)

A primeira aplicação desse princípio foi na forma de um compressor para o motor NSU de 50cc, com dois tempos, que iria estabelecer novos recordes mundiais em Utah, em 1956. O compressor rotativo capacitou esse pequeno motor a desenvolver 260HP por litro, atingindo uma velocidade de quase 160 km/h. (AMROUCHE et al, 1996)

Em 1958, Wankel fez um acordo com a companhia norte-americana de aviação Curtiss-Wright para que unissem seus esforços nas tentativas de fabricação de um grande motor baseado nesses princípios. Mais tarde começaram os testes com carros dotados de motores Wankel, diferentes uns dos outros. Dessa época até 1963, o motor foi gradualmente tomando forma definitiva e então adaptado a um pequeno NSU de dois lugares, apresentado no Salão de Automóvel em Frankfurt, no outono de 1963. A partir daí, foi concedida licença para a Toyo-Kogyo Co. (atual Mazda), Citroen, Mercedes-Benz, General Motors, e alguns construtores de motos como a Norton, a DKW Hercules e a Suzuki. Também foi utilizado em aviões e "hovercrafts", pelo seu baixo peso.

Talvez o melhor exemplo seja o magnífico NSU RO 80, com dois rotores, que começou a ser produzido em série em outubro de 1967, sendo que a versão com a direção do lado direito foi introduzida no mercado inglês em fins de 1968. Com o passar dos anos, e também devido aos problemas apresentados pelo motor, apenas a Mazda continuou a usá-lo. E em 1978, a marca lançou o modelo de maior sucesso com o motor Wankel, o RX-7, conforme Figura 1.(AMROUCHE et al, 1996)

Figura 2 - Mazda RX-7



Devido ao consumo e emissões altas em relação aos concorrentes, a Mazda interrompeu a produção do RX-7 em 2002, mas a tecnologia ainda continuou sendo utilizada no RX-8, e recebeu o nome de Renesis, porém em 21 de junho de 2012, o último carro com o motor foi fabricado. Como a Mazda era a única que ainda utilizava o motor Wankel, este parou de ser fabricado permanentemente. (BADR, NAIK & CALLAGHAN, 1991)

DESENVOLVIMENTO

O bloco Wankel, consta apenas de: rotor, caixa de rotor e eixo de excêntricos. As partes do motor podem ser visualizadas abaixo, conforme figura 2 com detalhes, sendo que:

- Placa de Cobertura Primária
- Cobertura dos Rotores
- Placa de Cobertura Intermediária
- Placa de Cobertura Final
- Admissão Múltipla de Ar
- Admissão Múltipla de Mistura e Injeção (Ar e Gasolina)
- Admissão de Ar
- Engrenagens Estacionárias
- Rotores
- Cambota
- Saída do escape

Figura 2 - Partes do Motor Wankel



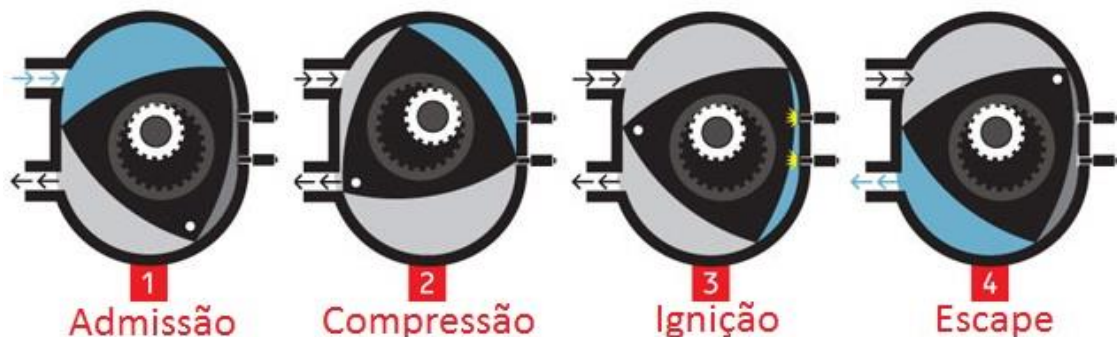
A carcaça externa ou bloco do motor Wankel conta com a superfície externa oval e alongada. Internamente as câmaras que abrigam o rotor que desempenha o papel do pistão também possuem forma oval. O rotor, por sua vez, é um componente com formato triangular

e laterais abauladas. No centro deste triângulo localiza-se a engrenagem que se acopla à engrenagem do eixo de saída do motor. (BADR, NAIK & CALLAGHAN, 1991)

A geometria interna do bloco faz com que o rotor ao girar (excentricamente) mantenha constantemente seus vértices em contato com as paredes do bloco, vedando cada uma das três câmaras formadas. Conforme esse giro ocorre, o volume de cada uma das três câmaras é alterado, produzindo aumento ou diminuição do volume dos gases do motor.

O funcionamento resume-se em quatro fases: admissão, compressão, combustão (ignição) e escapamento, conforme Figura 3.

Figura 3 - Quatro fases de funcionamento do motor Wankel



Na primeira fase, o rotor abre a janela de admissão. O seu movimento provoca a aspiração da mistura ar-combustível. Para que ocorra um maior enchimento da cavidade (melhor eficiência volumétrica), alguns motores Wankel são super carregados, ou seja, possuem compressor ou turbo para forçar a entrada da mistura durante a admissão. (JUNGBLUTH,1974)

Em seguida a janela de admissão é fechada pelo rotor e o volume começa a diminuir na fase de compressão. Essa fase dura até o espaço livre seja o mínimo (equivalente ao PMS - Ponto Morto Superior - no motor alternativo).

Pouco depois, a mistura comprimida passa pela vela de ignição e uma centelha é gerada, inflamando a mistura. Em alguns motores são utilizadas duas velas para assegurar uma perfeita queima da mistura.

Com a combustão ocorre também a expansão dos gases, que ocasiona o deslocamento do rotor, e, conseqüentemente, a abertura da janela de escape, ocorrendo a liberação dos gases queimados. (GOLDBERG, 1971)

Em apenas uma volta do rotor, três ciclos completos ocorrem, bem como três voltas completas do eixo do motor, que equivale ao eixo do virabrequim no motor convencional. Esta relação de três voltas do eixo motor para cada volta do rotor se deve a relação das engrenagens. Nos motores convencionais, o virabrequim realiza duas voltas completas para cada ciclo completo do pistão.

Fica então claro perceber, que devido às relações de voltas do rotor (em relação à engrenagem do motor) e número de explosões (uma em cada câmara, no total de três por volta) a cada giro completo do mesmo, porque os motores rotativos conseguem grandes níveis de potência com capacidades cúbicas razoavelmente pequenas.

Esse motor, de um modo geral, apresenta as seguintes vantagens relativamente aos motores alternativos:

- Simplicidade, devido à ausência de válvulas e mecanismos;

Eliminação dos mecanismos biela-manivela com redução dos problemas de compensação de forças e momentos, bem como vibratórios;

- Suavidade, que no caso do motor tradicional em que há inversão de movimento como no sobe e desce do pistão, no Wankel existe apenas o movimento rotativo, que proporciona um movimento mais suave;

- Menor número de peças móveis, o que poderá ocasionar construção e manutenção mais simples e de menor custo;

- Maior concentração de potência, logo menor volume e peso. Uma unidade de apenas 1,3 litro entrega 250 CV.

- Baixa vibração, devido ao fato de que só há um movimento rotativo, diminuindo, assim, o desgaste e prolongando sua vida útil.

Por outro lado, o motor apresenta problemas, como:

Problemas de vedação entre o cilindro e as paredes de cavidade, o que causa algumas dificuldades devido ao rigor das especificações do projeto e às tolerâncias mínimas de produção.

- Complexidade na lubrificação e refrigeração. Para complementar a lubrificação, uma pequena quantidade de óleo é queimada, o que eleva as emissões de poluentes, necessitando de um controle mais rigoroso na alimentação e no trato dos gases de escape.

- Curva de potência não muito elástica.

A câmara de combustão não é compacta (é extremamente longa), e acaba criando problemas de combustão (estabilidade de chama, que obriga ao uso de duas ou mesmo três velas) e a grandes perdas de calor, reduzindo o rendimento, e, conseqüentemente, aumentando o consumo.

O motor tem zonas intrinsecamente quente (entre as velas e a janela de escape) e outra intrinsecamente fria (zona após a admissão), apresentando grandes gradientes térmicos que têm de ser minimizados.

CONCLUSÃO

Devido aos grandes problemas enfrentados atualmente pelo aquecimento global, acreditamos que seja um dos principais motivos que o Motor Wankel não seja mais fabricado. Apesar de todas as comodidades para o usuário, como baixa vibração, o baixo som, as velocidades alcançadas, entre outras, as desvantagens superam essas vantagens.

A cada dia, novas tecnologias são produzidas pensando no conforto humano e no meio ambiente e baseado nos princípios do motor Wankel foi desenvolvido o motor quasiturbine, que veio para sanar suas desvantagens.

Todo o estudo de Felix Wankel foi grande contribuição para o desenvolvimento dessa e de novas tecnologias que ainda estão por vir.

REFERÊNCIAS

AMROUCH F., ERICKSON, P., VARNHAGEN, S., “An experimental investigation of hydrogen-enriched gasoline in a Wankel rotary engine”, *International Journal of Hydrogen Energy*, v.39, n.16, pp. 8525–8534, Feb.1996.

GORDON, R. PENNOCK, JOHN, BEAD, E., “Force analysis of the apex seals in the wankel rotary compressor including the influence of fluctuations in the crankshaft speed”, *Mechanism and Machine Theory*, v.32, n.3, pp. 349–361, Feb.1997. BADR, O., NAIK, S., CALLAGHAN, P.W., PROBERT, S.D., “Rotary Wankel engines as expansion devices in steam Rankine-cycle engines”, *Applied Energy*, v.39, n.1, pp. 59–76, Feb.1991.

BADR, O., NAIK, S., CALLAGHAN, P.W., PROBERT, S.D., “Wankel engines as steam expanders: Design considerations”, v.40, n.3, pp. 157–170, Feb.1991. JUNGBLUTH G., “Biographie Dr.-Ing. E.h. Felix Wank”, *Mechanism and Machine Theory*, v.9, n.2, pp. 145-146, Feb.1974.

GOLDBERG, M. “Rotary piston machines: Classification of design principles for engines, pumps and compressors” *Journal of Mechanisms*, v.6, n.3, pp. 342–343, Feb.1971.

APLICAÇÕES DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS NA MODELAGEM MATEMÁTICA PARA ENGENHARIA: UM ESTUDO DA CONDUÇÃO DE CALOR UNIDIMENSIONAL EM REGIME TRANSIENTE

Adriano Shineyder de Moraes Ramos¹; Moacir César da Vitória Júnior²; Natan Sian das Neves¹; Roger da Silva Rodrigues³; Vitor Pancieri Pinheiro⁴

1. Acadêmico do curso de Engenharia Civil da Faculdade Brasileira – MULTIVIX
2. Mestre em Física, docente da Faculdade Brasileira – MULTIVIX.
3. Mestre em Engenharia Mecânica, docente da Faculdade Brasileira – MULTIVIX.
4. Especialista em Docência do Ensino Superior, docente da Faculdade Brasileira - MULTIVIX

RESUMO

O presente artigo tem como objetivo a exposição da importância do uso de equações diferenciais na modelagem de problemas da engenharia, mais especificamente, na área da transferência de calor por condução em corpos unidimensionais, sob regime transiente. O domínio de técnicas ligadas às Equações Diferenciais é importante para diversas análises físicas-matemáticas, o que a torna-as imprescindíveis para um estudante de engenharia de forma geral. Em uma primeira etapa é tratada unicamente as ferramentas para resolução das Equações Diferenciais que serão necessárias para a modelagem do problema em questão. Já o foco da segunda etapa é desenvolver a modelagem do problema, saindo do princípio da conservação de energia até chegar à equação geral da transferência de calor. A partir disso, é chegada a terceira etapa, em que aplica-se na equação geral todas as hipóteses simplificadoras, adaptando a equação geral no problema a ser estudado, e, feito isso, resolve-se o problema proposto, a saber, uma barra com extremidades isoladas ou extremidades com temperatura zero.

Palavras-chave: Condução. Calor. Equações. Diferenciais. Regime. Transiente.

ABSTRACT

This article aims to show the importance of the use of differential equations to model engineering problems, specifically in the area of heat transfer by conduction in one-dimensional bodies, under transient. The domain techniques related to Differential Equations is important for all physical-mathematical analysis, which is essential for an engineering student, whatever it may be. In the first stage it is only treated the tools to solve the differential equations that will be needed for the modeling of the problem in question. But the focus of the second step is to develop the modeling of the problem, leaving the principle of conservation of energy to get the general equation of heat transfer. From this, it is now the third stage, which applies to the general equation all the simplifying assumptions, adapting the general equation in the problem to be studied, and done it, solves the proposed problem, to know, one with bar isolated edges or ends with zero temperature.

Keywords: Heat. Conduction. Differential. Equations. Transient. Regime.

INTRODUÇÃO

Uma análise na matriz da engenharia mecânica permite identificar ao menos três macro áreas de pesquisa bem evidentes, formando um triângulo singular. São elas: as áreas de termo fluidos, mecânica dos sólidos e ciência dos materiais. O braço de termo fluidos, por sua vez, é composto por três ciências elementares: transferência de calor e massa, termodinâmica e mecânica dos fluidos.

A transferência de calor tem seu alicerce no domínio dos mecanismos físicos de troca de calor, podendo haver fenômenos térmicos condutivos, convectivos e radiativos. Cada um desses mecanismos tem sua modelagem algébrica específica e sua correspondente equação de taxa (DEWITT; INCROPERA, 2014).

No âmbito dos fenômenos de interesse para a engenharia, aqueles com base térmica puramente condutiva merecem grande destaque pelo grande leque possível de aplicações práticas, dentre elas o problema de isolamento térmico, superfícies estendidas e difusão de calor em sólidos de forma geral, que acabam se fazendo muito presentes no cotidiano e área industrial. Tais fenômenos de forma geral são regidos e modelados por pela Equação de Fourier-Biot, cuja potencialidade de modelagem se estende a qualquer problema puramente condutivo, destacando-se entre eles os problemas de condução de calor em regime transiente, uma vez que a mudança nos parâmetros no tempo não pode ser desprezada em diversos fenômenos físicos, e por consequência, também devem ser contabilizadas nos modelos matemáticos com intuito de representá-los (KREITH, 2012).

As equações diferenciais são ferramentas versáteis e eficazes na tradução de fenômenos físicos para linguagem matemática, tornando possível modelar e solucionar problemas em diversos campos de estudo como física, matemática, engenharia e estatística. Todo engenheiro deve adquirir domínio sobre estas equações durante seu período de formação, pois, compreendê-las é fundamental para um exercício competente da profissão, seja como no âmbito industrial ou acadêmico.

TÉCNICAS ELEMENTARES DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

O estudo do problema de calor difusivo unidimensional em regime transiente exige o conhecimento de algumas técnicas e fundamentos ancorados em cálculo diferencial. Dentre elas destacam-se soluções de equações diferenciais de primeira e segunda ordem homogêneas, série de Fourier e por fim métodos de separação de variáveis o intuito de solucionar a equação diferencial parcial que modela o fenômeno em questão.

FATOR INTEGRANTE

Um dos métodos mais conhecidos e difundidos para a solução de equações diferenciais de primeira ordem é o chamado fator integrante. Tal método consiste primeiramente em multiplicar toda a EDO por uma função da variável independente da equação (BOYCE; DIPRIMA, 2014). Apresenta-se abaixo uma equação diferencial homogênea de primeira ordem em uma forma geral.

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = g(x) \quad (1)$$

Ao multiplicar a equação 1 por uma função $\mu(x)$, tem-se:

$$\mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu(x)p(x)y = \mu(x)g(x) \quad (2)$$

Invocando a regra do produto é possível escrever:

$$\frac{d}{dx}[\mu(x)y] = \mu(x)\frac{dy}{dx} + y\frac{d\mu(x)}{dx} \quad (3)$$

A menos de uma subtração simples a equação 3 pode ser reescrita como:

$$\mu(x)\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[\mu(x)y] - y\frac{d\mu(x)}{dx} \quad (4)$$

Substituindo a expressão 4 na equação 2 gera-se:

$$\frac{d}{dx}[\mu(x)y] - y\frac{d\mu(x)}{dx} + \mu(x)p(x)y = \mu(x)g(x) \quad (5)$$

Propondo-se uma forma geral do fator integrante como:

$$\mu(t) = e^{\int p(t)dt} \quad (6)$$

E substituindo a proposta da equação 6 na equação 5, é fácil observar que:

$$\frac{d}{dx} [\mu(x)y] = \mu(x)g(x) \quad (7)$$

Integrando-se a equação 7, tem-se:

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)} \left[\int g(x)\mu(x)dx + C \right] \quad (8)$$

EQUAÇÃO CARACTERÍSTICA E FÓRMULA DE EULER

Dentre outros fenômenos físicos de grande importância na engenharia, os problemas de transferência de calor envolvem em sua quase totalidade casos descritos direta ou indiretamente por equações ordinárias de segunda ordem. Tais equações podem ser escritas em sua forma mais geral como:

$$A(x) \frac{d^2y}{dx^2} + B(x) \frac{dy}{dx} + C(x)y = D(x) \quad (9)$$

A equação acima representa a estrutura de uma equação diferencial de segunda ordem não-homogênea com coeficientes variáveis, o que configura seu modelo mais abrangente. A solução de um caso como esse deve ser composto por uma solução que atenda à versão homogênea da equação 9 superposta com outra solução que atenda somente a parte não-homogênea representada pela função $D(x)$. A forma da solução geral pode ser expressa por:

$$y = y_H + y_P \quad (10)$$

Em relação à homogeneidade, a equação 9 pode ser considerada homogênea quando o termo $D(x)$ for nulo. Já em relação aos coeficientes divide-se as equações em tipos de coeficientes constantes ou coeficientes variáveis, sendo as primeiras de mais fácil solução. Para uma equação homogênea de coeficientes constante temos a seguinte estrutura, em que a , b e c são constantes.

$$a \frac{d^2y}{dx^2} + b \frac{dy}{dx} + cy = 0 \quad (11)$$

Suponha que uma função do formato $y=e^{rx}$ uma boa proposta de solução para a equação 11. Substituindo a proposta na mesma, tem-se:

$$ar^2 e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0 \quad (12)$$

Rearranjando a equação acima e evidenciando o termo exponencial, pode-se apresentar:

$$e^{rx}(ar^2 + br + c) = 0 \quad (13)$$

Uma inspeção simples na equação 13 mostra que a obediência da igualdade depende da nulidade do termo entre parênteses, uma vez que, uma função exponencial não pode assumir valor nulo. Dessa forma tem-se que:

$$ar^2 + br + c = 0 \quad (14)$$

A equação 14 é denominada equação característica, cuja principal utilidade é determinar o formato da solução geral da equação diferencial ordinária. Essa prerrogativa é feita através do cálculo do discriminante (Δ) como mostrado a seguir para três casos.

Caso I: $\Delta > 0$

Um resultado com discriminante positivo indica que a equação característica 14 terá duas raízes reais e distintas. Dessa forma, a solução da EDO homogênea associada pode ser escrita como:

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} \quad (15)$$

Caso II: $\Delta=0$

Analogamente um resultado nulo do discriminante indica que a equação 14 terá uma raiz única. Dessa forma a solução da EDO homogênea associada pode ser escrita como:

$$y = c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx} \quad (16)$$

Caso III: $\Delta < 0$

Por fim um resultado negativo para o discriminante indica que a equação 14 terá duas raízes complexas. Dessa forma a solução da EDO homogênea associada pode ser escrita como:

$$y = c_1 e^{(\alpha+\beta i)x} + c_2 x e^{(\alpha+\beta i)x} \quad (17)$$

Evidenciando o exponencial formado pela parte real da raiz característica, tem-se:

$$y = e^{\alpha x} (c_1 e^{\beta i x} + c_2 x e^{-\beta i x}) \quad (18)$$

Por sua vez, as exponenciais de números complexos presentes na equação 18 podem ser melhor trabalhadas com a **fórmula de Euler** mostrada a seguir.

$$e^{\beta i x} = i \operatorname{sen}(\beta x) + \cos(\beta x) \quad (19)$$

O uso da fórmula de Euler na equação 18 permite a escrita da seguinte solução geral para o caso com raízes complexas.

$$y = e^{\alpha x} (C \operatorname{sen}(\beta x) + D \cos(\beta x)) \quad (20)$$

Tais técnicas e desenvolvimentos mostrados *a priori* permitem o entendimento e compreensão matemática da modelagem aplicada a flambagem de barras com várias condições de contorno distintas.

SÉRIE DE FOURIER

Funções periódicas se caracterizam pela repetição contínua de valores dentro de um determinado intervalo na variável dependente, como pode ser observado na equação 21 a seguir.

$$f(x + p) = f(x) \quad (21)$$

Nota-se a estrutura simples de uma função periódica do período p , na qual por conceito o valor da função volta a se confirmar a cada ciclo.

Em engenharia, matemática e física, pode-se observar a ocorrência frequente de fenômenos periódicos, como o processo de combustão dentro do pistão de um motor, as vibrações associadas às peças móveis em uma máquina, dentre outras aplicações pertinentes. Nesse contexto, foi proposta e desenvolvida pelo físico e matemático *Jean Baptiste Joseph Fourier* a formulação de uma série infinita capaz de representar funções periódicas através de uma soma de termos harmônicos.

A estrutura algébrica da série de Fourier pode ser apreciada na equação 22 a seguir.

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \quad (22)$$

Os coeficientes da série são dados pelas fórmulas de Euler elencadas abaixo, cuja prova matemática baseia-se no conceito de ortogonalidade de funções (KREYSZIG, 2009).

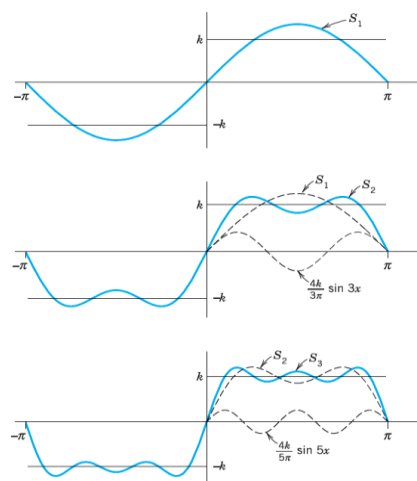
$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx \quad (23)$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \quad (24)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \quad (25)$$

A representação de uma função dotada de periodicidade através de uma série infinita pode constituir um conceito um tanto abstrato de se visualizar. Dessa forma, uma representação gráfica facilita o entendimento do conceito de aproximação proposto pela série.

Figura 1: Interpretação gráfica da série de Fourier



Fonte: Kreyszig, 2009, p. 04.

Observando a figura 1 é possível observar as sucessivas melhorias no ajuste dos termos da série em relação à função que se deseja representar. Esse fato elucida a convergência da série, que com infinitos termos, teoricamente, representaria a função numa sobreposição perfeita.

Método da separação de variáveis (MSV)

Uma grande parte dos fenômenos físicos de relevância para a engenharia, tais como problemas de transferência de calor, elasticidade, vibrações mecânicas, eletricidade, mecânica dos fluídos, dentre outros, são modelados através de equações diferenciais. Tais equações com níveis de complexidade variáveis podem ser classificadas da forma mais geral como ordinárias (EDO) ou parciais (EDP). A classificação é feita com base nos parâmetros dos quais depende a função a ser determinada pela equação diferencial. Funções que dependam de um só parâmetro são classificadas como EDO, enquanto

funções com dependência de mais de uma variável são enquadradas como EDP (KREYSZIG, 2009) (ÇENGEL, 2014).

Alguns exemplos de fenômenos modelados por equações diferenciais ordinárias são representados abaixo.

$$\frac{d^4y}{dx^4} = -\frac{q(x)}{EI} \quad \text{Deflexão de Vigas} \quad (26a)$$

$$F_r = m \frac{d^2x}{dt^2} \quad \text{Segunda Lei de Newton} \quad (26b)$$

$$m \frac{d^2y}{dt^2} + c \frac{dy}{dt} + ky = r(t) \quad \text{Vibrações Mecânicas Forçadas} \quad (26c)$$

De forma análoga pode-se apresentar alguns exemplos de problemas cuja modelo matemático exige uma representação por EDP. Seguem alguns desses casos.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \text{Equação da Continuidade para Fluidos} \quad (27a)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \quad \text{Equação de Poisson Bidimensional} \quad (27b)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{Equação da Onda Unidimensional} \quad (27c)$$

Por natureza a solução de equações diferenciais parciais é mais complexa em detrimento as diferenciais ordinárias. Visto isso será apresentada em seguida um método específico para a manipulação desse grupo tão versátil de equações.

O método de separação de variáveis consiste basicamente na proposta de uma solução formada por um produto de funções das variáveis independentes do problema. Em outras palavras, se um determinado campo potencial depende de dois parâmetros, é possível considerar que uma solução viável da EDP seja um produto entre uma função exclusiva do primeiro parâmetro e outra função exclusiva do segundo.

Para melhor contextualizar o método, considere que um determinado fenômeno de interesse, como é o caso da vibração de uma onda em uma corda tensionada, possa ser expressa matematicamente pela equação 27c. É de fácil observação que a variável primal $u=u(x,t)$ varia de acordo com uma coordenada espacial e com o tempo.

A expressão algébrica que traduz a ideia central do método de separação de variáveis é trazida pela seguinte proposta de solução mostrada a seguir.

$$u(x, t) = F(x)I(t) \quad (28)$$

O método de separação de variáveis inicia-se com a introdução da proposta de solução apresentada na equação 28 de volta na equação de governo, exposta na equação 27c. Dessa forma tem-se:

$$F\ddot{I} = c^2 F''I \quad (29)$$

Note que as derivadas temporais são simbolizadas por pontos acima da variável diferenciada enquanto as derivadas espaciais são simbolizadas de forma sintética com aspas.

Manipulando a equação 29 de forma a de fato separar as variáveis, podemos reescrevê-la no seguinte formato.

$$\frac{\dot{I}}{c^2 I} = \frac{F''}{F} \quad (30)$$

Considerando que a equação 30 é formada por quantidades constantes de ambos os lados é possível propor a igualdade a seguir, em que k representa uma constante arbitrária.

$$\frac{\ddot{I}}{c^2 I} = \frac{F''}{F} = k \quad (31)$$

A equação 31 divide-se dando origem a duas equações diferenciais ordinárias expressas pelas equações 32 e 33.

$$\ddot{I} - c^2 k I = 0 \quad (32)$$

$$F'' - k F = 0 \quad (33)$$

O valor da constante k pode ser determinado como positivo, negativo ou nulo, a depender das condições de contorno do problema fazendo alguns testes lógicos. Nesse problema, em específico, pode-se provar sem demais complicações que a constante deve ser negativa. Assim, adota-se uma formulação quadrada $k = -p^2$ para facilitar nos cálculos posteriores.

Substituindo a constante negativa nas equações 32 e 33, chega-se a:

$$\ddot{I} + c^2 p^2 I = 0 \quad (34)$$

$$F'' + p^2 F = 0 \quad (35)$$

Com técnicas simples de resolução de equações ordinárias de segunda ordem é possível constatar que a solução geral das equações 34 e 35 são dadas respectivamente pelas seguintes expressões.

$$F_n(x) = A_n \cos(px) + B_n \sin(px) \quad (36)$$

$$G_n(x) = C_n \cos(\lambda_n t) + D_n \sin(\lambda_n t) \quad (37)$$

Substituindo as equações 36 e 37 na equação 28, obtêm-se a expressão para a solução geral da EDP.

$$u(x, t) = (A_n \cos(px) + B_n \sin(px))(C_n \cos(\lambda_n t) + D_n \sin(\lambda_n t)) \quad (38)$$

De forma a sintetizar didaticamente o método de separação de variáveis, traçamos a seguir um algoritmo do método:

- I. Aplica-se a substituição $u(x,t)=F(x)G(t)$ à EDP em análise;
- II. Separa-se as variáveis em lados diferentes da equação;
- III. Presume-se que as funções são constantes, tornando possível gerar duas EDO's;
- IV. Solucionam-se as EDO's;
- V. Substituem-se as soluções gerais na fórmula de separação de variáveis.

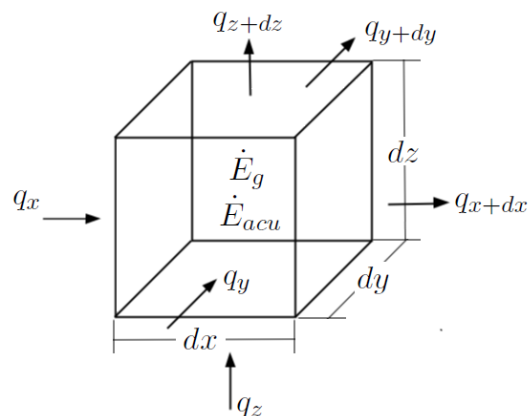
DESENVOLVIMENTO MATEMÁTICO

No âmbito da transferência de calor os problemas puramente condutivos assumem o papel de protagonizar efeitos físicos em diversas aplicações práticas na engenharia. Desse fato surge a necessidade por parte dos engenheiros mecânicos, em principal, de apresentarem autoridade sobre a modelagem e conceito de fenômenos como esses, seja para uso em pesquisa científica ou uso em aplicações práticas industriais.

De forma a representar esse conjunto de problemas condutivos de maneira generalizada o princípio de conservação de energia é invocado, com vistas na dedução de um modelo matemático centrado em uma equação diferencial parcial de uso versátil.

Para tanto, inicia-se com um balanço de energia em um material arbitrário, no qual há um campo tridimensional de temperatura e pode haver geração e acumulação de energia térmica. Considera-se um volume de controle (VC) infinitesimal do material ilustrado na figura 2, computando em todas as suas faces os fluxos energéticos de entrada e saída, tal como quantidades geradas ou acumulados no VC (DEWITT; INCROPERA, 2014).

Figura 2: Volume de Controle Infinitesimal de Análise



Fonte: Elaborado pelo autor

Os fluxos de calor condutivos de entrada q_x , q_y e q_z seguem a equação de taxa dada pela Lei de Fourier e posta abaixo de forma escalar como componente do fluxo em uma direção arbitrária.

$$q_n'' = -k_n \frac{\partial T}{\partial n} \quad (39)$$

Uma vez que, a energia pode ser gerada e acumulada dentro do elemento de análise, os fluxos de saída são de forma geral diferentes dos de entrada, podendo ser modelados por uma expansão em série de Taylor em primeira ordem como mostrado nas expressões 40, 41 e 42.

$$q_x + dx = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \quad (40)$$

$$q_y + dy = q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy \quad (41)$$

$$q_z + dz = q_z + \frac{\partial q_z}{\partial z} dz \quad (42)$$

Além dos fluxos de entrada e saída a energia gerada e acumulada dentro do volume do controle também devem ser modelados matematicamente de acordo. Segue abaixo sua estrutura.

$$E_{ger} = q dx dy dz \quad (43)$$

$$E_{acu} = \rho c p \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dz \quad (44)$$

Dado que todos os termos do esquema da figura 2 estão devidamente expressados em sua forma correta é possível escrever a ideia do balanço de energia térmica que tem seu

fundamento na primeira lei da termodinâmica. O balanço térmico no volume de controle é mostrado abaixo.

$$E_{ent} = E_{sai} + E_{ger} = E_{acu} \quad (45)$$

Substituindo as equações 40, 41, 42, 43, 44 na conservação de energia dada pela expressão 45, tem-se em dois passos:

$$q_x + q_y + q_z - (q_{x+dx} + q_{y+dy} + q_{z+dz}) + q dx dy dz = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dz \quad (46)$$

$$-\frac{\partial q_x}{\partial x} dx - \frac{\partial q_y}{\partial y} dy - \frac{\partial q_z}{\partial z} dz + q dx dy dz = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dz \quad (47)$$

Usando como base o conceito de equação de taxa condutivo da expressão 39 as derivadas dos fluxos da equação 47 podem ser feitas com facilidade e facilmente chegamos a:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] + q = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (48)$$

A equação acima é chamada Equação Geral da Difusão Térmica ou ainda Equação de Fourier-Biot. Sua importância reside no fato da potencialidade de computar numa escrita diferencial a modelagem matemática de qualquer problema puramente convectivo generalizado, o que dá ao engenheiro uma ferramenta fantástica como ponto de partida para a solução de problemas condutivos simples e complexos, pois, induz um pensamento que converge do geral ao caso específico.

Para melhorar um pouco a análise geral da Equação de Fourier-Biot vamos adotar a hipótese de que o meio em que o calor se propaga é isotrópico, ou seja, apresenta as mesmas propriedades mecânicas e termo físicas e todas as três direções ordenadas. Dessa forma a equação 48 fica simplificada nos moldes da 49, mostrada abaixo.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{q}{k} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (49)$$

O termo β é a difusividade térmica do meio, e pode ser definida por:

$$\beta = \frac{k}{\rho c_p} \quad (50)$$

Uma análise rápida na equação 49 revela sua real complexidade de solução. Cada uma de suas derivadas parciais espaciais do lado esquerdo da equação necessita de duas condições de contorno para ser solucionada e o conhecimento de uma condição inicial do campo de temperatura também é necessário para atender a derivada temporal do lado direito da equação.

MODELAGEM NA ENGENHARIA

No contexto amplo dos problemas condutivos englobados pela equação geral 48 estamos aqui particularmente interessados nos problemas de condução unidimensional em regime transiente. Portanto, agora a amplitude da análise é restrita assim como sua complexidade. Faz-se isso através das hipóteses simplificadoras abaixo, de forma a adequar nossa modelagem ao problema foco.

- I. Condução unidimensional;
- II. Condução sem geração interna de calor;
- III. Regime Transiente;
- IV. Material Isotrópico;

V.

Aplicando as hipóteses simplificadoras listadas acima na equação 48 é possível chegar a uma equação de governo de seguinte formato.

Com isso a equação (18) adquire a forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (51)$$

Para facilitar os cálculos, substituiremos a constante de difusividade térmica que acompanha a derivada em relação ao espaço por α^2 . A substituição será feita para uma única constante quadrada para facilitar os cálculos que serão realizados. Com isso a equação 51 adquire a forma abaixo.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (52)$$

A equação 52 trata-se de uma EDP, pois a função potencial u depende de duas variáveis, posição e tempo (x , t). Essa equação exige três condições, duas condições de contorno, ou seja, o estado em que se encontra as pontas do corpo de estudo, e uma condição inicial, ou seja, o estado inicial de todo o corpo.

O Método de Separação de Variáveis tem como primeiro passo de sua implementação a proposição de uma solução para a equação de governo 51 que dependa apenas de funções de uma variável, correlatas as coordenadas espaciais x e y em função das quais o campo potencial $u(x,t)$ deve ser encontrado.

$$u_n(x, t) = F(x)G(t) \quad (53)$$

Substituindo a proposta dada pela equação 54 na equação de governo 52, temos:

$$\frac{\dot{G}}{\alpha^2 G} = \frac{F''}{F} \quad (54)$$

Por inspeção é possível provar que a equação 54 pode ser igualada a uma constante que deve ser necessariamente negativa, dessa forma, pode escrever:

$$\frac{\dot{G}}{\alpha^2 G} = \frac{F''}{F} = -p^2 \quad (55)$$

Separando a equação 55 em duas equações ordinárias, tem-se:

$$F'' - p^2 F = 0 \quad (56)$$

$$\dot{G} - \alpha^2 p^2 G = 0 \quad (57)$$

A solução geral da equação 56 pode ser escrita como:

$$F_n(x) = c_1 \cos(px) + c_2 \sin(px) \quad (58)$$

Para maior sintetização, assumindo-se que $\lambda_n^2 = \alpha^2 p^2$, a solução geral da equação 57 pode ser apresentada por:

$$G_n(t) = c_3 e^{-\lambda_n^2 t} \quad (59)$$

Retornando as soluções gerais de cada EDO dadas pelas equações 58 e 59 na proposta original de solução e somando-se infinitas soluções, temos uma expressão algébrica geral independente das condições de contorno e iniciais do problema dada por:

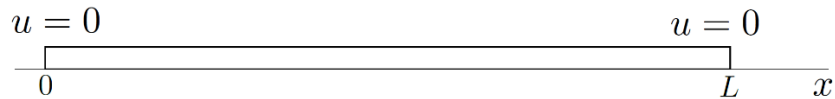
$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} c_1 \sin px + c_2 \cos px \right\} \{c_3 e^{-\lambda_n^2 t}\} \quad (60)$$

A *posteriori* serão resolvidos dois casos com diferentes condições de contorno e com uma função de condição inicial genérica de forma a determinar as constantes e conhecer o campo transiente do campo potencial u na barra.

Caso I: Extremidades com temperatura zero

Um esquema representativo do domínio físico do problema é dado abaixo para ilustrar um problema de calor no qual as condições de distribuição de temperatura no interior da barra variam com o tempo.

Figura 3: Geometria e Condições de Contorno



Fonte: Elaborado pelo autor

As condições de contorno e iniciais que caracterizam os problemas seguem abaixo:

$$u(0, t) = 0 \quad \text{Face Esquerda} \quad (61a)$$

$$u(L, t) = 0 \quad \text{Face Direita} \quad (61b)$$

$$u(x, 0) = f(x) \quad \text{Condição Inicial da Barra} \quad (61c)$$

Aplicando a condição de contorno 61a na equação solução 53, tem-se:

$$u_n(0, t) = F(0)G(t) = 0 \rightarrow F(0) = 0 \rightarrow C_1 = 0 \quad (62)$$

Portanto a função exclusiva de x reduz-se a:

$$F_n(x) = C_2 \text{sen} px \quad (63)$$

Impondo agora a condição de contorno 61b temos que:

$$u_n(L, t) = F(L)G(t) = 0 \rightarrow F(L) = 0 \quad (64)$$

Para a obediência da relação encontrada em 64 é necessário que:

$$C_2 \text{sen}(pL) = 0 \rightarrow \text{sen}(pL) \rightarrow pL = n\pi \rightarrow p = \frac{n\pi}{L} \quad (65)$$

Portanto as infinitas soluções de F que atendem às condições de contorno especificadas são:

$$F_n(x) = \text{sen} \frac{n\pi x}{L} \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (66)$$

Com a função espacial já determinada em concordância com as condições de contorno, vamos utilizar sua versão da equação 66 juntamente com a solução geral encontrada na equação 59 e retornar a equação de solução geral 60, tem-se:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} c_2 \text{sen} px \right\} \{c_3 e^{-\lambda_n^2 t}\} \quad (67)$$

Agrupando-se às constantes presentes na expressão 67 de forma a compactar em uma nova constante $c_n = c_2 c_3$.

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{sen} \frac{n\pi x}{L} e^{-\lambda_n^2 t} \quad (68)$$

Uma vez possuindo a solução geral de u a menos de uma constante, esta pode ser determinada utilizando a condição inicial conhecida, resultando em:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{sen} \frac{n\pi x}{L} = f(x) \quad (69)$$

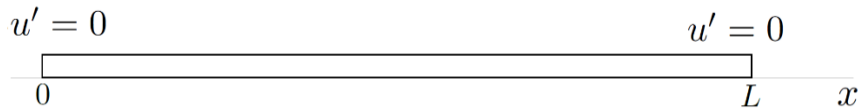
Comparando a equação 69 com a série de Fourier conceitual introduzida na expressão 22, é possível determinar o valor da constante C_n através das fórmulas de Euler, como já modelado a seguir.

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \text{sen} \frac{n\pi x}{L} dx \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (70)$$

Caso II: Extremidades Isoladas

Na segunda situação considera-se uma barra com extremidades sendo isoladas, ou seja, com fluxo de calor nulo em seus contornos. Pode ser apreciado a seguir um esquema que representa a situação física em questão.

Figura 4: Representação gráfica do objeto de estudo



Fonte: Elaborado pelo autor

As condições de contorno e iniciais que caracterizam este segundo caso são postas pelo conjunto de equações 71.

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = 0 \quad \text{Face Esquerda} \quad (71a)$$

$$\frac{\partial u(L, t)}{\partial x} = 0 \quad \text{Face Direita} \quad (71b)$$

$$u(x, 0) = f(x) \quad \text{Condição Inicial da Barra} \quad (71c)$$

Em primeiro momento, vamos aplicar a condição de contorno 71a na proposta 53.

$$u'_n(0, t) = F'(0)G(t) = 0 \rightarrow F'(0) = 0 \quad (72)$$

É viável mostrar a estrutura diferenciada da função F para então aplicar efetivamente a condição de contorno.

$$F'_n(x) = -c_1 p \text{sen}(px) + c_2 p \text{cos}(px) \rightarrow F'(0) = 0 \rightarrow c_2 = 0 \quad (73)$$

Reescreve-se a função exclusiva de x novamente da seguinte forma:

$$F_n(x) = c_1 \text{cos}(px) \quad (74)$$

Aplicando-se agora a condição de contorno 71b na equação 74, temos:

$$F'(L) = -c_1 p \text{sen}(pL) = 0 \rightarrow \text{sen}(pL) = 0 \rightarrow pL = n\pi \rightarrow p = \frac{n\pi}{L} \quad (75)$$

As infinitas soluções que atendem às condições de contorno em x são dadas por:

$$F_n(x) = \text{cos}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (76)$$

Com a função espacial já determinada em concordância com as condições de contorno, vamos utilizar sua versão da equação 76 juntamente com a solução geral encontrada na equação 76 e retornar a equação de solução geral 60, tem-se:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} c_1 \text{cos}(px) \right\} \{c_3 e^{-\lambda_n^2 t}\} \quad (77)$$

Agrupando-se às constantes presentes na expressão 77 de forma a compactar em uma nova constante $c_n = c_1 c_3$.

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{cos}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\lambda_n^2 t} \quad (78)$$

Uma vez possuindo a solução geral de u a menos de uma constante, esta pode ser determinada utilizando a condição inicial conhecida, resultando em:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{cos}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = f(x) \quad (79)$$

Comparando a equação 79 com a série de Fourier conceitual introduzida na expressão 22, é possível determinar o valor da constante c_n através das fórmulas de Euler, como já modelado a seguir.

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (80)$$

CONCLUSÃO

A transferência de calor faz parte do triângulo singular da engenharia mecânica que contempla as pesquisas em termoflúidos, o que torna sua compreensão de suma importância para um engenheiro em formação, de modo que possa completar a graduação plenamente equipado para lidar com os problemas a serem enfrentados na profissão. Para tanto não só é necessário gerar resultados, mas compreender como chegar a eles, para que assim seja capaz de adaptar a solução a cada situação proposta.

O conhecimento adquirido decorrente do problema de condução de calor unidimensional em regime transiente pode ser expandido para uma análise bidimensional ou tridimensional. Nesse ponto é importante salientar que as técnicas envolvendo equações diferenciais e física-matemática de forma mais robusta são recorrentes em mesmo em problema extremamente diferentes entre si, em outras palavras, as mesmas ferramentas podem ser utilizadas para a solução de diversos tipos de situações físicas.

Ao longo da modelagem matemática do problema posto nota-se a importância dos conhecimentos e técnicas da seara de equações diferenciais. Em linhas gerais, diversos fenômenos físicos são governados por uma equação diferencial, portanto saber resolvê-las é crucial. Por fim, é possível dizer que a disciplinas de equações diferenciais constitui o ramo central do que denominamos de modelagem matemática para engenharia moderna, sendo desta forma tema de relevância primal dentro de qualquer curso de engenharia.

REFERÊNCIAS

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de contorno** (9ª edição). LTC Editora, Rio de Janeiro, 2014.

DEWITT, David P.; INCROPERA, Frank P. **Fundamentos de Transferência de Calor e de Massa**. Livros Técnicos e Científicos (LTC) Editora SA. 7.ed. Rio de Janeiro. 2014.

KREITH, Frank. **Princípios de transferência de calor**. Cengage Learning Editores, 2012.

KREYSZIG, E. **Matemática superior para engenharia**. Livros técnicos e científicos, 2009.

ÇENGEL, Yunus A. **Transferência de Calor e Massa: Uma Abordagem Prática**, 3ª Edição. São Paulo, 2009.

ÇENGEL, Y. A.; III, W. J. P. **Equações Diferenciais**. Porto Alegre: AMGH Editora, 2014.